Introdução à Geometria Espacial

Paulo Cezar Pinto Carvalho

IMPA INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
VITAE APOIO À CULTURA, EDUCAÇÃO E PROMOÇÃO SOCIAL

Introdução à Geometria Espacial

Paulo Cezar Pinto Carvalho

Relação dos títulos da coleção IMPA/VITAE:

- **Introdução à Geometria Espacial**, *Paulo Cezar Pinto Carvalho*
- **Construções Geométricas**, *Eduardo Wagner*
- **Progressões e Matemática Financeira**, *Augusto C. Morgado, Eduardo Wagner e Sheila Cristina Zani*
- **Coordenadas no Espaço**, *Elon Lages Lima*
- **Logaritmos**, *Elon Lages Lima*
- **Medida e Forma em Geometria**, *Elon Lages Lima*
- **Meu Professor de Matemática**, *Elon Lages Lima*
- **Trigonometria / Números Complexos**, *Manfredo P. do Carmo, Augusto C. Morgado e Eduardo Wagner*
- **Problemas e Soluções**, *Elon Lages Lima*
- **Coordenadas no Plano**, *Elon Lages Lima*
- **Análise Combinatória e Probabilidade**, *Augusto C. Morgado, J. Bosco Pitombeira, Paulo C. Carvalho e Pedro Fernandez*

Diagramação, composição e fotolito digital:
GRAFTEX Comunicação Visual
Rio de Janeiro, Tel. 512.5726 Fax. 274.9944

Capa:
Rodolfo Capeto

Impressão:
Gráfica Wagner Ltda.
Rio de Janeiro

Prefácio

O principal objetivo deste livro é discutir e esclarecer as dificuldades encontradas ao se fazer a transição da Geometria Plana para a Geometria Espacial. Inicialmente, o trabalho foi concebido como uma introdução ao livro *Coordenadas no Espaço*, de autoria de Elon Lages Lima, desta mesma coleção, visando preparar o leitor para a passagem de um sistema bidimensional de coordenadas para um sistema tridimensional. Percebemos, no entanto, que a relevância do material comportava um volume separado.

Mesmo ao nível do Segundo Grau, a Geometria Espacial costuma receber um tratamento axiomático. Neste livro, procuramos explicar que uma das causas para esta abordagem são as dificuldades encontradas, pelo estudante, na passagem da Geometria Plana para a Espacial. Na Geometria Plana dispomos de excelentes modelos concretos para os objetos com que lidamos, já que as superfícies sobre as quais escrevemos ou desenhamos são bons modelos para o plano da Geometria. Na Geometria Espacial não temos as mesmas facilidades. Assim, o desenvolvimento cuidadoso da teoria é essencial para a compreensão das relações existentes entre objetos no espaço. Com este objetivo em mente, procuramos conduzir o leitor ao longo do processo de escolha de um conjunto adequado de axiomas, vistos como um conjunto mínimo de propriedades capazes de caracterizar as relações entre pontos, retas e plano no espaço tridimensional.

O restante do livro é dedicado ao estudo de paralelismo e perpendicularismo entre retas e planos, sempre com o cuidado de indicar de que forma os resultados obtidos se relacionam aos axiomas iniciais.

Uma preocupação sempre presente no texto é a de tentar tornar mais concretos os modelos da Geometria Espacial. Com esta finalidade,

procuramos, a cada novo conceito introduzido, indicar que novos objetos podem ser construídos a partir dele. Desta forma, pirâmides, prismas, poliedros regulares, etc, são introduzidos assim que os conceitos necessários são apresentados. A mesma preocupação nos levou a incluir um capítulo sobre Geometria Descritiva, com ênfase nos problemas de interseção envolvendo retas e planos.

Este prefácio não estaria completo sem uma palavra de agradecimento a Elon Lages Lima e a Eduardo Wagner, cujas sugestões contribuíram em muito para a forma final do texto.

Rio de Janeiro, maio de 1993

Paulo Cezar Pinto Carvalho

Conteúdo

1. Introdução

A transição da Geometria Plana para a Geometria Espacial, em geral efetuada no final do Segundo Grau, é muitas vezes difícil para o aluno. É fácil entender porque isto ocorre. Como habitantes de um mundo tridimensional, temos grande facilidade para lidar com o mundo bidimensional da Geometria Plana. Modelos concretos para os objetos com que lidamos na Geometria Plana são fáceis de construir e manipular. As superfícies sobre as quais escrevemos ou desenhamos são excelentes modelos para o plano da Geometria e permitem representar com fidelidade retas, polígonos, círculos e demais figuras planas. Ou seja, podemos facilmente concretizar as noções abstratas da Geometria.

Quando passamos para o mundo tridimensional da Geometria Espacial passamos a enfrentar limitações de diversa ordem. Em primeiro lugar, pelo menos com a tecnologia atual, não dispomos de uma forma prática para representar com fidelidade objetos tridimensionais. Em geral, recorremos a projeções bidimensionais de tais objetos. Mas estas projeções distorcem ângulos, modificam comprimento de segmentos e não permitem distinguir pontos que estejam sobre a mesma linha de projeção.

Ilustramos estas dificuldades com o seguinte exemplo. Tomamos um losango $ABCD$ e afirmamos que suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ formam um ângulo reto (Figura 1.1a). Mesmo que uma pessoa tenha dificuldades em demonstrar tal propriedade, terá grandes chances de reconhecê-la como verdadeira com auxílio da intuição. Em último caso, poderá facilmente verificar experimentalmente que a propriedade de fato parece ser verdadeira. Tomamos agora um tetraedro regular $ABCD$ e afirmamos que duas arestas opostas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ formam um ângulo reto (Figura 1.1b). Mesmo pessoas

familiarizadas com o tetraedro regular terão pouca ajuda de sua intuição para entender e demonstrar tal propriedade. Em particular, a figura em perspectiva de um tetraedro não ajuda muito a entender a situação (na verdade, ambas as propriedades podem ser obtidas como casos particulares de um mesmo teorema, como veremos mais tarde).
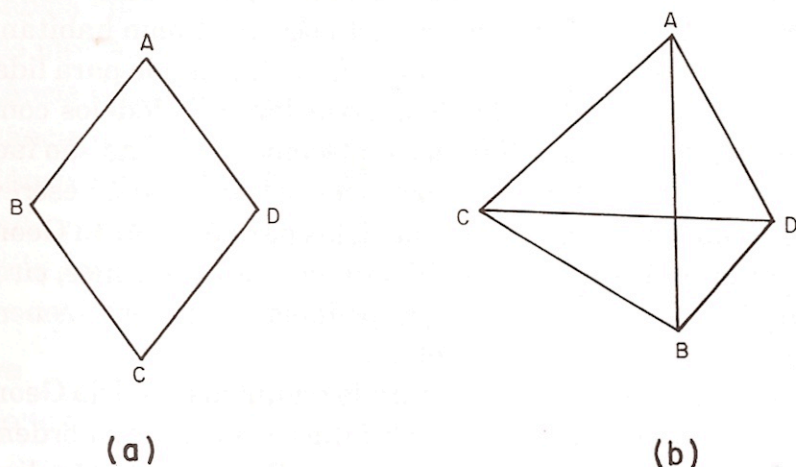
Fig. 1.1 - Geometria Plana × Geometria Espacial

Estas dificuldades são parte da razão pela qual a Geometria Espacial costuma ser introduzida de modo bem mais formal que a Geometria Plana. Já que nossa intuição não é uma aliada tão confiável como na Geometria Plana, sentimos uma necessidade maior em nos apoiarmos em uma teoria sistemática. Há, no entanto, uma outra boa razão. A Geometria tem sido, por séculos, um dos melhores exemplos de uma teoria matemática rigorosa, em que resultados (teoremas) são demonstrados utilizando argumentos lógicos, a partir de alguns fatos tomados como ponto de partida (postulados). O estudo da Geometria Espacial nestas bases introduz a argumentação lógica em Matemática, exatamente em um campo em que sentimos necessidade de auxiliar nossa intuição empregando argumentos sólidos.

Há, no entanto, um problema com a introdução do tratamento lógico-matemático quando se inicia a Geometria Espacial. Em geral, é escolhido um sistema de axiomas para a Geometria como um todo; de uma certa forma, a Geometria Plana, já conhecida, é "re-axiomatizada". Preferimos aqui fazer, de forma mais explícita, a passagem da Geometria Plana para a Espacial; isto é, admitimos conhecidos todos os resultados da Geometria Plana, válidos em cada plano do espaço. Nos preocupamos apenas com as propriedades adicionais que deverão exprimir as relações fundamentais de pontos, retas e planos no espaço.

Um outro aspecto que perseguimos é tornar tão concretas quanto possível as propriedades que demonstraremos. Com esta finalidade damos ênfase especial à construção de figuras espaciais (pirâmide, prismas, poliedros regulares). Optamos por construir cada figura importante assim que tenhamos recurso para tal. Por exemplo, pirâmides são construídas assim que enunciamos o postulado que nos permite escolher um ponto exterior a um plano dado. Nossa intenção é fazer com que o leitor perceba, de imediato, a importância de cada novo conceito.

2. Propriedades iniciais

A Geometria Espacial examina as propriedades de figuras que são construídas a partir de certos elementos básicos do *espaço: pontos, retas* e *planos*. Todos os termos em itálico na sentença anterior são considerados primitivos. Ao invés de tentar defini-los, os caracterizamos por meio de certas propriedades fundamentais, chamadas de *postulados*, que servem de ponto de partida para a teoria a ser desenvolvida. Como é usual, representaremos pontos por letras maiúsculas $(A, B, C, \dots)$, retas por letras minúsculas $(r, s, t, \dots)$ e planos por letras gregas $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$.

A Geometria é uma teoria matemática que visa criar uma abstração de um mundo que faz parte de nossa realidade. Desta forma, é razoável que as propriedades escolhidas como postulados sejam "verdadeiras" e "óbvias". Isto é, elas devem exprimir fatos que indiscutivelmente correspondam à nossa intuição a respeito dos elementos geométricos básicos. Isto parece vago, e de uma certa forma é: na verdade, não há um conjunto fixo de postulados. Há alguma liberdade para escolhermos como postulados as propriedades que nos pareçam mais "óbvias" e mais simples de serem utilizadas para demonstrar teoremas.

Frisamos que a Geometria Plana foi adotada como ponto de partida. Desta forma, não precisamos enunciar propriedades a respeito de retas e pontos contidos em um plano. No entanto, devemos reafirmar, para o espaço, as propriedades básicas de pontos e retas.

Postulado 1. *Por dois pontos do espaço passa uma e somente uma reta.*

Postulado 2. *Dada uma reta do espaço, existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.*

A seguir enunciamos as propriedades básicas a respeito de pontos e planos.

Postulado 3. *Por três pontos do espaço não situados na mesma reta passa um e somente um plano.*

Postulado 4. *Dado um plano do espaço, existem pontos que pertencem ao plano e pontos que não pertencem ao plano.*

Os postulados acima estabelecem propriedades importantes sobre o espaço e seus pontos, retas e planos. Intuitivamente, o Postulado 3 estabelece que, enquanto a reta é uma entidade unidimensional, o plano é uma entidade bidimensional. Já o Postulado 4 diz que o espaço tem dimensão superior ao plano (isto é, é pelo menos tridimensional). Decorre também dos postulados 3 e 4 que por dois pontos dados passa sempre um plano (que não é único).

Além dos postulados acima precisaremos de mais um postulado. Entretanto, antes de enunciá-lo, vejamos algumas propriedades que podem ser obtidas utilizando somente os quatro primeiros postulados. Fazemos, primeiro, a seguinte observação. Da Geometria Plana sabemos que dois pontos A e B situados no mesmo plano determinam uma única reta r (Figura 2.1). Por outro lado, o Postulado 1 diz que existe uma única reta do espaço passando por estes dois pontos; esta reta, portanto, só pode ser a reta r, que está contida no plano. Em conseqüência, temos a propriedade a seguir.
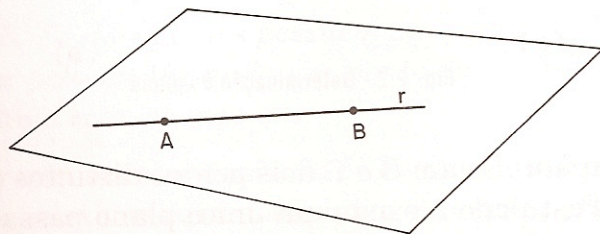
Fig. 2.1 - Inclusão da reta em um plano

Teorema. *Se uma reta tem dois de seus pontos em um plano, então ela está contida neste plano.* □

Este teorema exprime uma propriedade fundamental a respeito do comportamento de retas e planos. O leitor deve notar que o que nos permitiu demonstrá-lo foi o fato de admitirmos conhecidos os resultados da Geometria Plana. Se não admitíssemos tais resultados, seria natural escolher a propriedade acima como um postulado. Devemos observar, também, que, de acordo com esta propriedade, uma reta e um plano no espaço só podem ter uma das seguintes posições relativas: a reta pode estar contida no plano; pode ser secante ao plano (se ela possui um único ponto em comum com o plano); ou pode ser paralela ao plano (se não possui ponto comum com o plano).

Também com o auxílio da propriedade acima, podemos estabelecer outras formas de determinação do plano, envolvendo retas. Naturalmente, o ponto de partida é o Postulado 3, segundo o qual um plano é determinado por três pontos não colineares.

Teorema. *Por uma reta* r *e um ponto* A *exterior a esta reta passa um único plano. Por duas retas concorrentes* s *e* t *passa um único plano.*
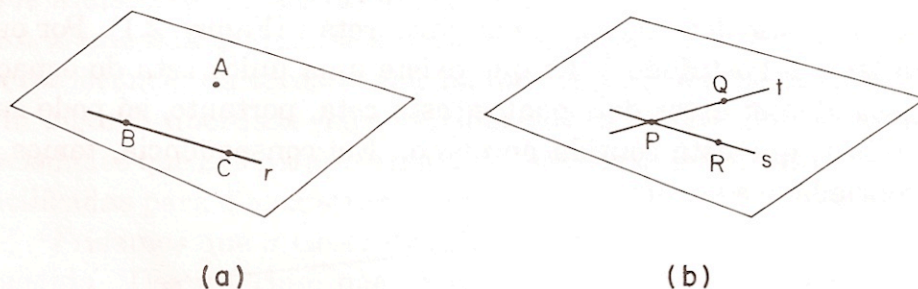
Fig. 2.2 - Determinação do plano

Demonstração: Sejam B e C dois pontos distintos em r (Figura 2.2a). Pelo Postulado 3 existe um único plano passando por A, B e C. Mas este plano contém a reta r, já que contém dois de seus pontos.

Para a segunda parte, seja P o ponto de interseção de s e t e sejam Q e R pontos tomados sobre s e t, ambos distintos de P

(Figura 2.2b). O único plano definido por P, Q e R necessariamente contém s e t, já que contém dois pontos de cada uma das retas. □

Dissemos acima que ainda nos falta um postulado para estabelecer as propriedades fundamentais do espaço e de seus pontos, retas e planos. Este postulado final se refere à tridimensionalidade do espaço. Em um esforço de abstração, vemos que todas as propriedades vistas até o momento valeriam para pontos, retas e planos situados em um espaço, digamos, de dimensão 4. Vamos precisar de um postulado adicional capaz de fixar, definitivamente, a dimensão do espaço em 3.

Podemos chegar a este último postulado examinando o que já sabemos sobre a interseção de dois planos. Se dois planos têm dois pontos comuns A e B, então eles têm em comum pelo menos a reta r definida por estes dois pontos. Se existir algum ponto C, comum aos planos e não situado em r, então os planos são necessariamente coincidentes, já que os três pontos não colineares A, B e C definem um único plano, pelo Postulado 3. Sobram ainda o caso em que os planos não têm nenhum ponto em comum e o caso em que os planos possuem apenas um ponto em comum. É provável que esta última possibilidade tenha causado estranheza no leitor; o último postulado consistirá justamente em eliminar esta possibilidade: num espaço de dimensão 3 dois planos não podem ter um único ponto comum (isto pode muito bem ocorrer em um espaço de dimensão superior).

Postulado 5. *Se dois planos possuem um ponto em comum então eles possuem pelo menos mais um ponto em comum (e portanto, pelo menos uma reta em comum).*

Observe que, em conseqüência do Postulado 5, existem apenas três posições relativas para dois planos do espaço: eles podem ser coincidentes; eles podem ser paralelos (quando não têm ponto em comum); ou eles podem ser secantes (quando têm uma reta em comum).

Com auxílio do Postulado 5 vamos a seguir demonstrar um

teorema que, muitas vezes, é adotado, no lugar do Postulado 5, como um postulado capaz de caracterizar a tridimensionalidade do espaço. Este teorema expressa a propriedade que um plano tem de separar o espaço. Note que um ponto é capaz de separar uma reta mas não um plano; uma reta é capaz de separar um plano mas não o espaço. Intuitivamente, a propriedade de separação do espaço por um plano traduz o fato de que o espaço tem uma só dimensão a mais que o plano.

Teorema. *Todo plano divide o espaço em dois semi-espaços que têm a seguinte propriedade: se dois pontos* A *e* B *estão em um mesmo semi-espaço, então o segmento* $\overline{AB}$ *está contido neste semi-espaço e não corta o plano; se os pontos* A *e* B *estão em semi-espaços distintos, o segmento* $\overline{AB}$ *corta o plano.*

Demonstração: Utilizaremos, na demonstração, o fato de que uma reta divide o plano em dois semi-planos (este fato é usualmente adotado como um postulado da Geometria Plana).

Seja P um ponto qualquer do espaço que não pertença ao plano α. Vamos dividir os pontos do espaço que não pertencem a α em dois conjuntos, chamados de semi-espaços, de acordo com o seguinte critério: um semi-espaço é formado por todos os pontos Q, exteriores ao plano α, tais que o segmento $\overline{PQ}$ não corta o plano (este é o semi-espaço que contém P); o outro semi-espaço é formado pelos pontos Q, exteriores a α, tais que o segmento $\overline{PQ}$ corta o plano. Mostramos, a seguir, que estes semi-espaços gozam da propriedade do enunciado do teorema.

Sejam A e B pontos situados no semi-espaço que contém P. Seja β um plano passando por P, A e B (este plano é único se P, A e B não são colineares, mas existe em qualquer caso). Se o plano β não corta o plano α, o segmento $\overline{AB}$ também não corta α. Suponhamos, então, que α e β tenham pontos comuns. Como α e β são distintos, sua interseção é uma reta r, que divide β em dois semi-planos (Figura 2.3a). Como os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ não cortam α, certamente não cortam r; logo, A e B estão no mesmo semi-plano.

Mas isto significa que o segmento $\overline{AB}$ está contido neste semi-plano e assim não corta r e, em conseqüência, não corta α.
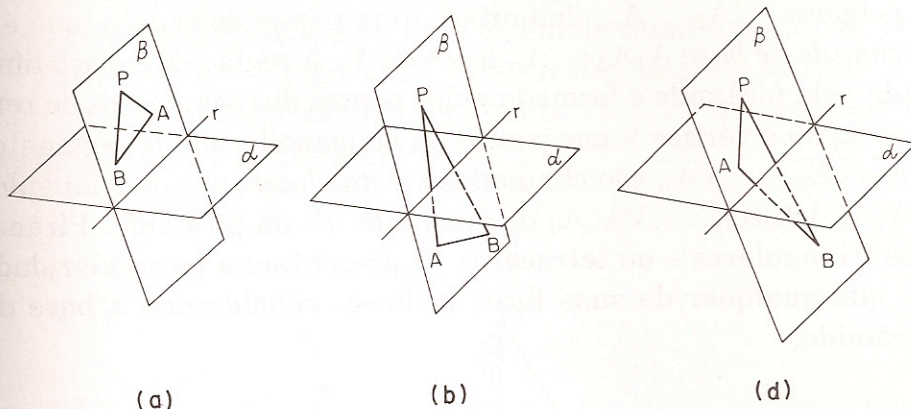
Fig. 2.3 - Um plano separa o espaço

Se A e B estão ambos situados no semi-espaço que não contém P (Figura 2.3b), a situação é análoga: existe um plano β que passa por P, A e B, que corta α segundo uma reta r. No plano β, A e B estão ambos situados no semi-plano oposto ao de P em relação a r. Logo, o segmento $\overline{AB}$ não corta r e assim não corta α.

Finalmente, consideremos o caso em que A está em um semi-espaço e B no outro (Figura 2.3c). Como antes, existe um plano β passando por P, A e B que corta α segundo a reta r. Agora, no plano β, A está situado no semi-plano de P e B está situado no outro semi-plano em relação a r. Logo, o segmento $\overline{AB}$ corta a reta r e, assim, o plano α. □

Nos exercícios, pedimos ao leitor que, usando o teorema acima como um postulado, demonstre a afirmativa do Postulado 5, mostrando assim que poderíamos utilizá-lo como o "postulado da tridimensionalidade do espaço".

Encerramos esta seção construindo, com o auxílio das propriedades básicas aqui apresentadas, nosso primeiro poliedro.

Construção de pirâmides. Considere um polígono plano A_1, $A_2 \ldots A_n$ e um ponto V exterior ao plano do polígono, o qual existe pelo Postulado 4 (Figura 2.4). Traçamos os segmentos $\overline{VA_1}$, $\overline{VA_2}$,

$\ldots, \overline{VA_n}$. Cada dois vértices consecutivos de $A_1A_2\ldots A_n$, determinam com V um triângulo. Estes triângulos, juntamente com o polígono $A_1A_2\ldots A_n$, delimitam uma região do espaço, que é a *pirâmide de base* $A_1A_2\ldots A_n$ e *vértice* V. A região do espaço limitada pela pirâmide é formada pelos pontos dos segmentos de reta que ligam o vértice V aos pontos do polígono-base. Os segmentos $\overline{VA_1}, \overline{VA_2}, \ldots, \overline{VA_n}$ são chamados *arestas laterais* e os triângulos $VA_1A_2, VA_2A_3, \ldots, VA_nA_1$ de *faces laterais* da pirâmide. Pirâmides triangulares – ou tetraedros – apresentam a particularidade de que qualquer de suas faces pode ser considerada a base da pirâmide.
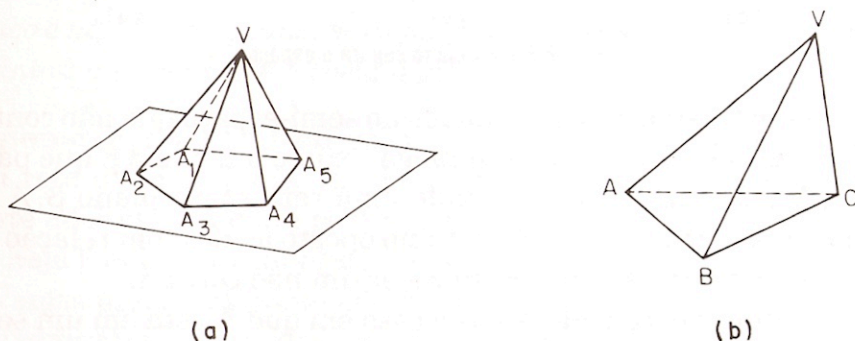
Fig. 2.4 - Uma pirâmide pentagonal e um tetraedro

Uma pirâmide é um caso particular de um *poliedro*. Um poliedro é toda região do espaço delimitada por um conjunto de polígonos planos, chamados faces do poliedro, que satisfazem as seguintes condições:

- a interseção de dois polígonos é vazia ou é um vértice comum aos dois ou é um lado (ou aresta) comum aos dois.
- cada lado de um polígono é lado de exatamente mais um outro polígono.

Da mesma forma que na Geometria Plana – em que a palavra polígono pode indicar tanto a região por ele delimitada quanto o seu contorno – a palavra poliedro é utilizada tanto para indicar a

região do espaço quanto para indicar a coleção de polígonos que limita esta região.

Exemplo. Consideremos uma pirâmide quadrangular de base $ABCD$ e vértice V (Figura 2.5). As arestas laterais opostas $\overline{VA}$ e $\overline{VC}$ determinam um plano α, enquanto $\overline{VB}$ e $\overline{VD}$ determinam um plano β. Qual é a interseção de α e β?
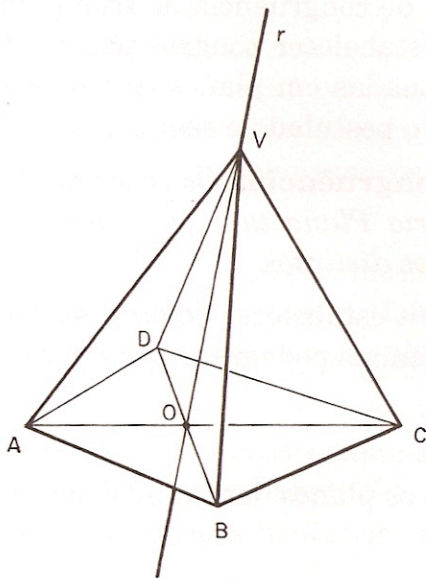
Fig. 2.5

Os planos α e β são distintos (A, por exemplo, está em α mas não em β) e têm um ponto comum V. Logo, sua interseção é uma reta r que passa por V. Para localizarmos um segundo ponto de r, consideremos as interseções de α e β com o plano da base, que são as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente, do quadrilátero $ABCD$. Logo, o ponto de interseção de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ é comum aos três planos α, β e $ABCD$; portanto, está na reta de interseção de α e β. Assim, α e β se cortam segundo a reta que passa por V e pelo ponto de interseção de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

Encerramos esta seção com a seguinte observação. Todos os postulados discutidos até o momento são "postulados de posição". Ou seja, eles não envolvem conceitos ligados a ordem ou compara-

ção, necessários para estabelecer as noções de medida de segmentos e ângulos e de congruência de figuras. Na realidade, como adotamos a Geometria Plana como ponto de partida, de lá consideramos conhecidos todos estes conceitos, que culminam com os casos de congruência de triângulos, fundamentais para a Geometria Plana métrica. Para a Geometria Espacial, é suficiente estender os casos de congruência de triângulos, de modo a poder utilizá-los para estabelecer congruência de figuras planas, mas possivelmente situadas em planos distintos. Isto é, acrescentamos à nossa lista o postulado a seguir.

Postulado de congruência. *Os casos de congruência de triângulos da Geometria Plana também são válidos para triângulos situados em planos distintos.*

(A rigor, basta estabelecer como postulado um dos casos de congruência; os demais podem ser deduzidos a partir dele.)

Exercícios

2.1 Quantos são os planos determinados por 4 pontos não coplanares?

2.2 Considere um conjunto de pelo menos três retas distintas. Mostre que, se duas quaisquer destas retas são concorrentes, então elas estão todas num mesmo plano ou passam todas pelo mesmo ponto.

2.3 Seja F uma figura tal que quatro quaisquer de seus pontos sejam coplanares. Mostre que F é plana, isto é, está contida em um plano.

2.4 Duas retas r e s são concorrentes em um ponto O. Fora do plano determinado por r e s tomamos um ponto P qualquer. Qual é a interseção do plano definido por r e P com o plano definido por s e P?

2.5 Dois triângulos ABC e DEF, situados em dois planos distintos, são tais que as retas AB, AC e BC encontram as retas DE, DF e EF

nos pontos M, N e P, respectivamente. Mostre que M, N e P são colineares.

2.6 Suponha que em um lugar do Postulado 5 (segundo o qual a interseção de dois planos não pode ser um único ponto) tivéssemos adotado a propriedade da separação do espaço por um plano. Isto é, tivéssemos o seguinte:

Postulado 5′. *Um plano divide os pontos que lhe são exteriores em dois subconjuntos, chamados semi-espaços, de forma que um segmento com extremos no mesmo semi-espaço não corta o plano e um segmento com extremos em semi-espaços diferentes corta o plano.*

Utilizando os Postulados 1, 2, 3, 4 e 5′, mostre que a interseção de dois planos não pode ser um único ponto. (Isto mostra que substituindo 5 por 5′ obtemos um sistema equivalente de postulados para a Geometria.)

2.7 Um conjunto F de pontos do espaço chama-se *convexo* quando, dados dois pontos A e B em F, o segmento $\overline{AB}$ está contido em F. Diga quais dos conjuntos de pontos abaixo são convexos:

a) Um plano;
b) Um semi-espaço;
c) Os pontos interiores a uma pirâmide;
d) Os pontos interiores a um tetraedro.

2.8 Considere uma pirâmide quadrangular V-ABCD. Sejam M, N e P pontos das arestas laterais $\overline{VA}$, $\overline{VB}$ e $\overline{VC}$, respectivamente. O plano determinado por M, N e P corta a aresta $\overline{VD}$ em um ponto Q. Diga como Q pode ser obtido a partir de M, N e P.
[Sugestão: considere os pontos de interseção das diagonais dos quadriláteros ABCD e MNPQ.]

3. Paralelismo de retas

O leitor talvez tenha observado que não mencionamos na seção anterior um dos casos clássicos de determinação do plano – por meio de um par de retas paralelas. Para tal, primeiro precisamos definir retas paralelas no espaço. Na Geometria Plana, duas retas distintas podem ser concorrentes (quando possuem exatamente um ponto comum) ou paralelas (quando não possuem nenhum ponto comum). Da mesma forma, na Geometria Espacial duas retas distintas podem ter um único ponto em comum ou nenhum ponto em comum; mas é conveniente separar esta última situação em dois casos.

Definição: *Duas retas do espaço chamam-se* paralelas *quando não possuem ponto comum mas estão contidas em um mesmo plano. Quando duas retas do espaço não estão contidas no mesmo plano (o que necessariamente implica em que elas não possuam ponto comum) elas são chamadas de retas* reversas.

Desta definição decorre imediatamente o caso de determinação do plano através de duas retas paralelas r e s. Por definição, certamente existe um plano α que as contém. Para mostrar que α é único, tomemos um ponto A qualquer sobre s (Figura 3.1).
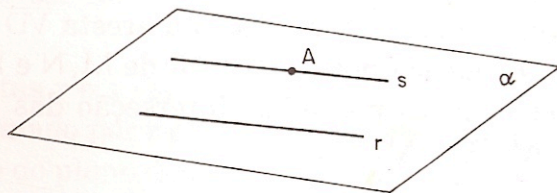
Fig. 3.1 - Duas retas paralelas determinam um único plano

Se existisse um outro plano α' também contendo r e s, os planos α

e α' ambos conteriam r e A, o que é impossível, já que uma reta e um ponto exterior determinam um único plano.

Uma outra conseqüência da definição de retas paralelas é a validade do fato a seguir, que é uma extensão para o espaço do Postulado de Euclides sobre as paralelas.

Teorema. *Por um ponto fora de uma reta se pode traçar uma única reta paralela a ela.*

Demonstração: Seja r uma reta dada e seja A um ponto situado fora de r (Figura 3.2). Seja α o plano determinado por A e r. Seja s a paralela a r em α, traçada por A. Para mostrar que s é a única paralela a r traçada por A, suponha que uma outra reta s' passe por A e seja paralela a r. Como s' é paralela a r, existe um plano α' contendo r e s'. Mas tal plano α' contém r e A e, portanto, coincide com α. Logo s' (da mesma forma que s) é uma paralela a r traçada por A e contida em α. Pelo Postulado de Euclides, s e s' coincidem, o que demonstra a unicidade da reta paralela. □
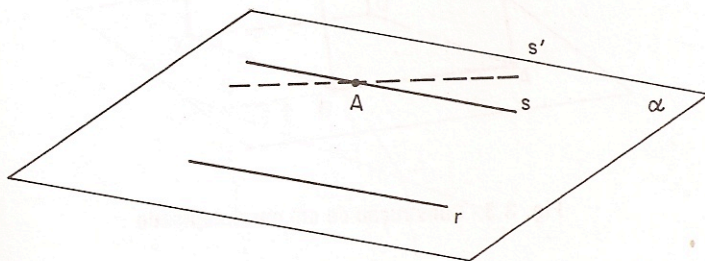
Fig. 3.2 - Reta paralela a uma reta passando por um ponto

O paralelismo de retas no espaço possui propriedades semelhantes ao paralelismo no plano. Em particular, *se duas retas distintas* r *e* s *são paralelas à mesma reta* t, *então* r *e* s *são paralelas entre si*.

A seguir, usamos a construção da reta paralela a uma reta dada por um ponto dado para construir um paralelepípedo.

Construção de um paralelepípedo. O paralelepípedo

ABCDEFGH da Figura 3.3 é um poliedro que pode ser construído a partir de três segmentos de reta não coplanares $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ (isto significa que o ponto E não pertence ao plano definido por $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$). Inicialmente, conduzimos por B e D paralelas a $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$, obtendo o paralelogramo ABCD. A seguir, traçamos as paralelas a $\overline{AE}$ por cada um dos pontos B, C e D. Tomando segmentos iguais a $\overline{AE}$ sobre estas retas, no mesmo semi-espaço de E, são obtidos os pontos F, G e H. Finalmente, são traçados os segmentos $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ e $\overline{HE}$. Estes segmentos se situam no mesmo plano, já que as retas EF e GH são paralelas (basta notar que ABFE e CDHG são paralelogramos). Paralelepípedos são exemplos de poliedros *convexos*. Isto é, um paralelepípedo fica inteiramente contido no semi-espaço determinado por cada uma de suas faces.
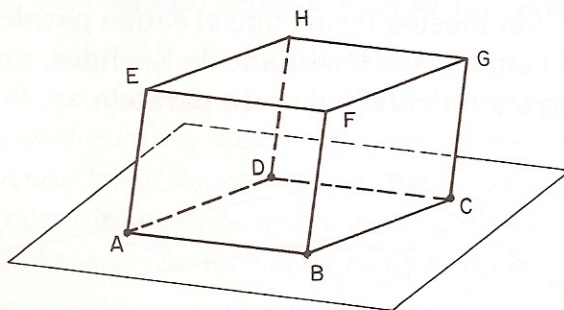
Fig. 3.3 - Construção de um paralelepípedo

Aproveitamos o exemplo acima para ilustrar a existência de retas reversas. As retas definidas pelas arestas $\overline{AE}$ e $\overline{BC}$, por exemplo, são reversas. De fato, por construção, E não pertence ao único plano que contém A, B e C, o que mostra que as retas AE e BC não estão situadas em um mesmo plano.

A construção da reta paralela a uma reta por um ponto dado nos permite definir *ângulo* entre retas arbitrárias do espaço. Se as retas são concorrentes, o ângulo entre elas é definido, de acordo com a Geometria Plana, como o menor ângulo formado por elas. O caso de retas reversas, no entanto, representa uma situação

nova. Vamos definir o ângulo entre retas reversas como o ângulo formado por duas retas concorrentes, paralelas às retas dadas. Para que esta definição faça sentido é preciso que este ângulo não dependa das paralelas escolhidas. De fato isto ocorre, como mostra o teorema a seguir:

Teorema. *Sejam* (r, s) *e* (r', s') *dois pares de retas concorrentes tais que* r *e* r' *são paralelas entre si e* s *e* s' *também são paralelas entre si. O ângulo formado por* r *e* s *é igual ao ângulo formado por* r' *e* s'.

Demonstração: Sejam A o ponto de interseção de r e s e B o ponto de interseção de r' e s' (Figura 3.3). Sobre r e s, tomemos pontos A_1 e A_2 e tracemos as paralelas A_1B_1 e A_2B_2 à reta AB. Os quadriláteros AA_1B_1B, AA_2B_2B e $A_1A_2B_2B_1$ são paralelogramos. Logo, $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$, $\overline{AA_2} = \overline{BB_2}$ e $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$. Logo, os triângulos AA_1A_2 e BB_1B_2 são iguais, o que mostra que os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são iguais. Portanto, o ângulo entre as retas r e s é igual ao ângulo entre as retas r' e s'. □
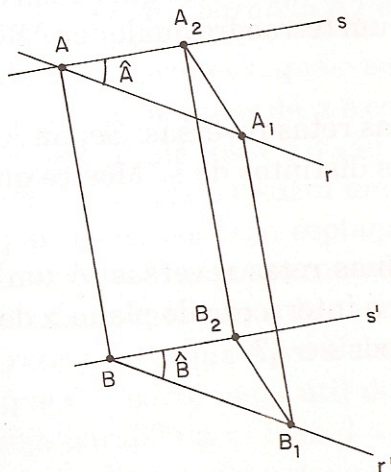
Fig. 3.4 - Pares de retas paralelas determinam ângulos iguais

Retas do espaço que formam ângulo reto são chamadas de re-

tas *ortogonais*. Assim, retas perpendiculares são retas ortogonais que são coplanares (portanto, concorrentes).

Exercícios

3.1 Mostre que duas retas distintas paralelas a uma mesma reta são paralelas entre si.

3.2 É verdade que duas retas distintas ortogonais a uma terceira são sempre paralelas entre si?

3.3 Seja r uma reta qualquer e s uma reta não paralela a r. Mostre que todas as retas paralelas a s e concorrentes com r estão contidas no mesmo plano.

3.4 Sejam A, B, C e D pontos quaisquer do espaço (não necessariamente coplanares). Sejam M, N, P e Q os pontos médios de $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Mostre que $MNPQ$ é um paralelogramo.

3.5 Mostre que os três segmentos que unem os pontos médios das arestas opostas de um tetraedro qualquer $ABCD$ se encontram em um mesmo ponto.

3.6 Sejam r e s duas retas reversas. Sejam A e B pontos distintos de r e C e D pontos distintos de s. Mostre que as retas AC e BD são reversas.

3.7 Sejam r e s duas retas reversas, A um ponto em r e B um ponto em s. Qual é a interseção do plano α definido por r e B com o plano β definido por s e A?

4. Paralelismo de reta e plano

Começamos por rever as possíveis posições relativas de uma reta r e um plano α do espaço. Há três casos possíveis para a interseção de r e α. Se existirem dois ou mais pontos de interseção, então r estará obrigatoriamente contida em α. Se existir um único ponto comum a r e α, dizemos que r e α são *secantes*. Finalmente, quando r e α não possuem pontos em comum, eles são *paralelos*.

Nas aplicações, planos são tipicamente definidos através de um dos casos de determinação já vistos (isto é, através de pontos e retas). É útil, portanto, estabelecer critérios capazes de oferecer conclusões a respeito dos planos baseados em propriedades de suas retas. Veremos nas próximas seções vários teoremas cujo papel será estabelecer tais critérios. O teorema a seguir é um deles.

Teorema. *Um plano α e uma reta r não contida em α são paralelos se e somente se existe uma reta s paralela a r e contida em α.*

Demonstração: Suponha primeiro que r seja paralela a α (Figura 4.1). Seja A um ponto qualquer de α e consideremos o plano β determinado por r e A. Os planos α e β são distintos e possuem o ponto A em comum. Logo eles possuem uma reta s em comum. As retas r e s são paralelas, pois são coplanares e não possuem ponto em comum (se existisse tal ponto comum ele seria um ponto comum a r e α, o que contradiria o fato de r ser paralela a α). Logo, de fato existe uma reta s em α que é paralela a r.

Para a volta (que é a parte mais útil do teorema), suponha que a reta s de α seja paralela a r. Seja β o plano definido por r e s. Os planos α e β são distintos e possuem a reta s em comum. Como a reta r está contida em β, se ela cortasse o plano β, seria necessariamente em um ponto da interseção s de α e β. Mas isto é impossível, já que r e s são paralelas. Logo, r é paralela a α. □

Consideremos, agora, dois planos α e β, que se cortam segundo uma reta s. Se r é uma reta de β e é paralela a s, então r é paralela a α, pelo teorema anterior. Este fato pode ser utilizado para estabelecer paralelismo de retas no espaço.
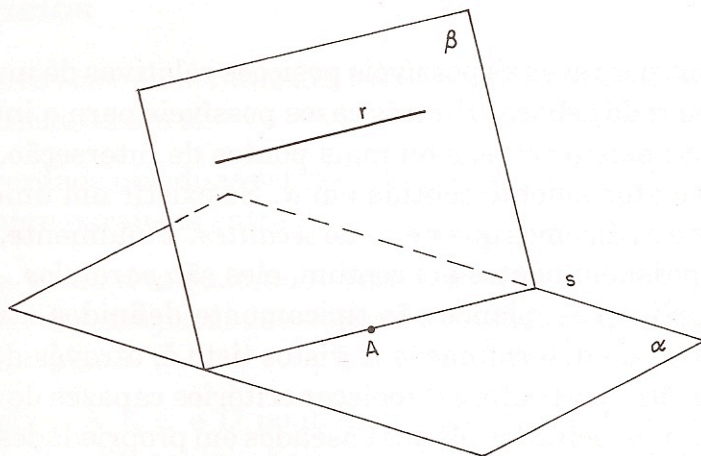
Fig. 4.1 - Critério de paralelismo de reta e plano

Exemplo. Consideremos uma pirâmide $VABCD$, em que a base $ABCD$ é um paralelogramo (Figura 4.2). Consideremos o plano α definido pelos pontos V, A e B. A reta CD é paralela a α, já que ela é paralela à reta AB contida em α. Esta é uma situação típica em que o teorema anterior é utilizado como um critério de paralelismo de reta e plano.

Exemplo. Consideremos um paralelepípedo $ABCDEFGH$. O que podemos dizer a respeito da reta r de interseção dos planos α e β determinados pelos pares de arestas opostas $(\overline{AE}, \overline{CG})$ e $(\overline{BF}, \overline{DH})$ (Figura 4.3)?

Observamos, inicialmente, que r é a reta que passa pelos pontos O e Q, de interseção das diagonais das bases. Além disso, podemos afirmar que r é *paralela* às arestas $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$. De fato, AE é paralela a β, já que é paralela à reta BF de β. Mas AE está contida no plano α. Portanto, AE é necessariamente paralela

à reta r de interseção de α e β.
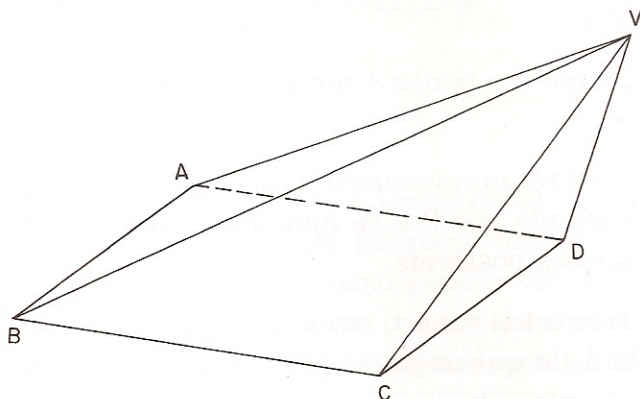
Fig. 4.2 - Identificando reta e plano paralelos
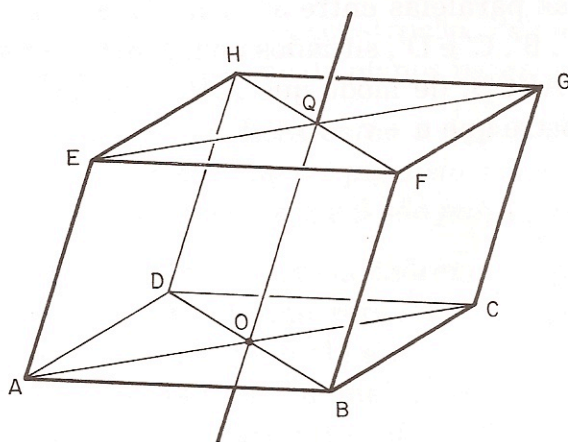
Fig. 4.3

Exercícios

4.1 Mostre que se uma reta é paralela a dois planos secantes, então ela é paralela à reta de interseção dos dois planos.

4.2 Suponha que os planos α, β e γ têm exatamente um ponto em comum. Mostre que não existe nenhuma reta simultaneamente paralela a α, β e γ.

4.3 Sejam r e s duas retas reversas. Construa um plano contendo r e paralelo a s.

4.4 Construa por um ponto A um plano paralelo a duas retas não paralelas r e s.

4.5 Sejam r e s retas reversas e P um ponto do espaço. Construa uma reta passando por P e se apoiando em r e s. Considere as diversas situações possíveis.

4.6 Dadas três retas r, s e t, reversas duas a duas, construa uma reta paralela a t e que se apoia em r e s. Mostre que a solução é única.

4.7 Seja $ABCD$ um paralelogramo. Pelos vértices A, B, C e D são traçadas retas paralelas entre si. Um plano α corta estas retas em pontos A', B', C' e D', situados no mesmo semi-espaço relativo ao plano de $ABCD$, de modo que $\overline{AA'} = a$, $\overline{BB'} = b$, $\overline{CC'} = c$ e $\overline{DD'} = d$. Mostre que $a + c = b + d$.

5. Paralelismo de planos

Como vimos anteriormente, se dois planos distintos α e β do espaço possuem um ponto comum, eles possuem uma reta em comum. Desta forma, dois planos do espaço podem ser coincidentes, secantes (se possuírem uma reta em comum), ou paralelos (se não possuírem pontos comuns). Os resultados estabelecidos até aqui mostram que nenhuma outra situação pode ocorrer. Mas na realidade, ainda não mostramos que a terceira situação pode ocorrer, isto é, não construímos ainda pares de planos paralelos. Nesta seção, mostramos como fazer esta construção. Primeiro, estabelecemos um critério de paralelismo de planos baseado em retas.

Teorema. *Se α e β são paralelos, então α é paralelo a cada reta de β. Reciprocamente, se o plano α é paralelo a duas retas concorrentes contidas ao plano β, então α e β são paralelos.*

Demonstração: A primeira parte do teorema é a mais simples e a menos interessante. De fato, uma reta r de β não pode ter pontos comuns com α e é, portanto, paralela a α.

Para a segunda parte (que é a que interessa), tomemos duas retas r e s do plano β, concorrentes em A, ambas paralelas ao plano α (Figura 5.1). Os planos α e β são distintos; suponhamos que se cortem segundo uma reta t. As retas r e s não cortam α e, portanto, não podem cortar a reta t que está contida em α. Mas isto significa que as retas r e s (que estão no mesmo plano β que t) são ambas paralelas a t, o que contradiz a unicidade da paralela a t passando por A. Logo α e β não possuem uma reta comum, o que mostra que eles são paralelos. □

O teorema anterior estabelece que quando dois planos são paralelos, cada reta de um é paralela ao outro. Por outro lado, para demonstrar que dois planos são paralelos basta exibir um par

de retas concorrentes de um deles tais que ambas sejam paralelas ao outro plano. É fundamental que as retas sejam efetivamente concorrentes. Um plano pode ser paralelo a uma infinidade de retas paralelas de outro sem que os planos sejam paralelos. De fato, se dois planos são secantes, cada um deles é paralelo a todas as retas do outro que são paralelas à sua reta de interseção (Figura 5.2).
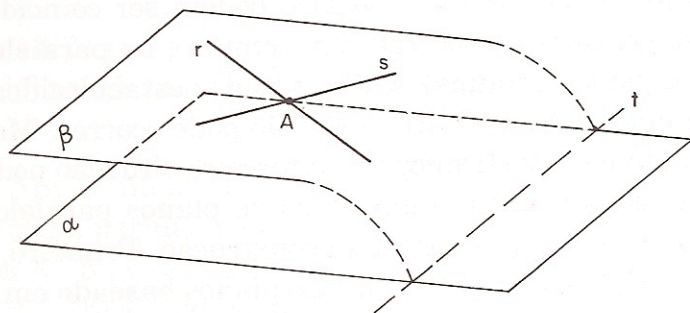
Fig. 5.1 - Paralelismo de planos
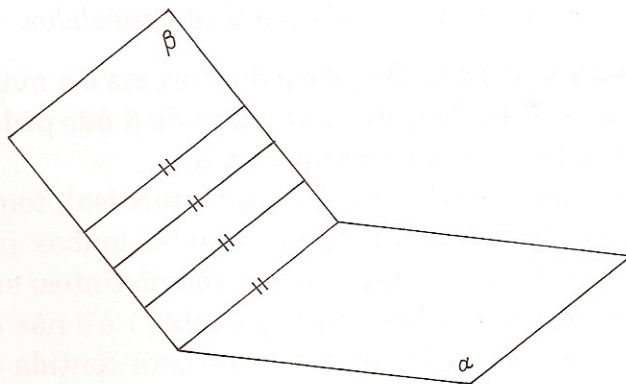
Fig. 5.2 - O plano α é paralelo a uma infinidade de retas de β

Com o auxílio do teorema anterior estamos aptos, agora, a construir planos paralelos.

Teorema. *Por todo ponto* A *exterior a um plano dado* α *passa exatamente um plano* β *paralelo a* α.

Demonstração: Para demonstrar a existência do plano, tomemos duas retas concorrentes r e s contidas em α (Figura 5.3). Sejam r' e s' as paralelas a r e s traçadas por A e seja β o plano definido por r' e s'. As retas r' e s' são paralelas a α e portanto o plano β é paralelo a α.
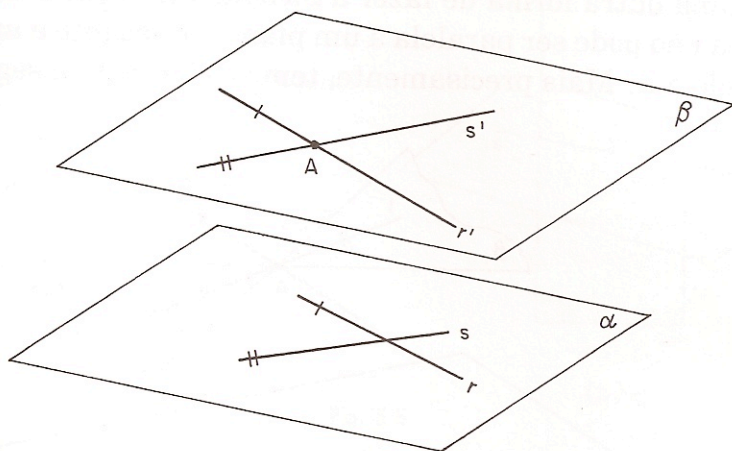
Fig. 5.3 - Construção do plano paralelo

Para mostrar que o plano é único, suponhamos que existam dois planos β_1 e β_2 paralelos a α, ambos passando por A (Figura 5.4). Como os planos são distintos e ambos passam por A, sua interseção é uma reta r, paralela a α. Tomamos uma reta s em α, não paralela a r, que determina com A um plano γ. A interseção de γ e β_1 é uma reta t, que é necessariamente paralela a s (já que t e s são coplanares e estão contidas em planos paralelos). Observe que, por ser paralela a s, t é necessariamente distinta de r. Analogamente, a interseção de γ e β_2 é uma reta u, também paralela a s. Como t e u passam ambas por A, elas são necessariamente coincidentes. Logo β_1 e β_2 contêm, além da reta r de interseção, uma segunda reta comum $t = u$. Logo, β_1 e β_2 são necessariamente coincidentes. Portanto, o plano paralelo a α por A é único.

□

No teorema anterior, construímos o (único) plano paralelo a

α por A através de duas retas concorrentes quaisquer, ambas paralelas a α. Como as retas escolhidas foram completamente arbitrárias, o argumento do teorema anterior mostra que o plano β, paralelo a α passando por A, contém todas as paralelas a α conduzidas por A. Na verdade o plano paralelo β é a união de todas estas retas. Uma outra forma de fazer a mesma afirmação é dizer que uma reta não pode ser paralela a um plano α e secante a um plano β paralelo a α. Mais precisamente, temos o teorema a seguir:
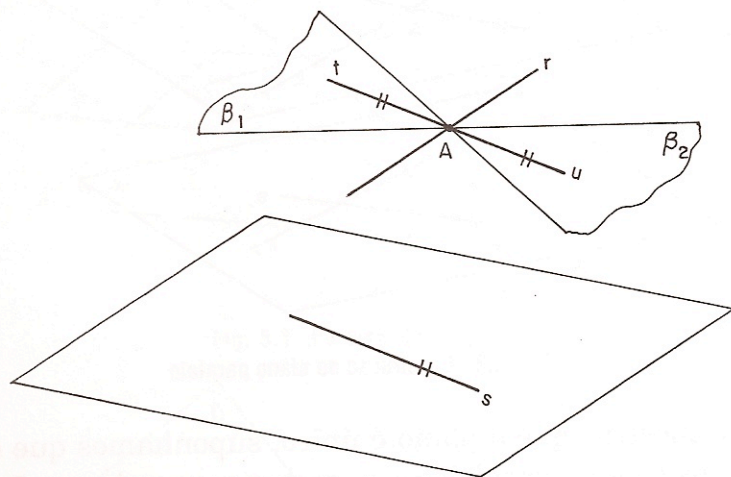
Fig. 5.4 - Unicidade do plano paralelo

Teorema. *Se uma reta corta um plano, corta também qualquer plano paralelo a este. Se um plano corta uma reta, corta também qualquer reta paralela a ela.*

Demonstração: Sejam α e β planos paralelos e r uma reta secante a α (Figura 5.5). Seja A o ponto de interseção de r e α. Como r passa por A, certamente r não está contida em β. Se r fosse paralela a β, estaria necessariamente contida em α, o que é impossível. Logo, r é necessariamente secante a β.

Para a segunda parte, suponha que a reta r corta o plano α e considere uma reta r' paralela a r. O plano γ determinado por r e

r′ é certamente secante a α, sendo a interseção uma reta s. Como r é secante a s, sua paralela r′, contida no mesmo plano que r e s, certamente também é secante a s e, portanto, a α. □
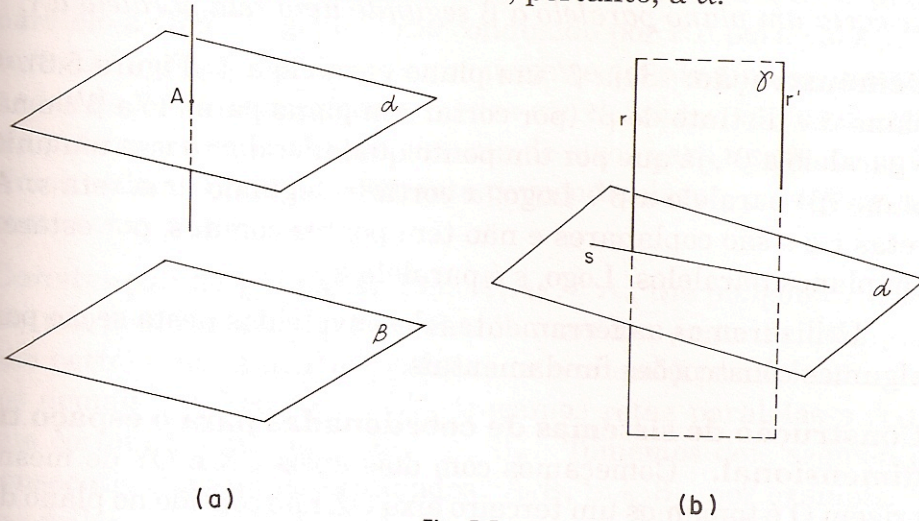
Fig. 5.5
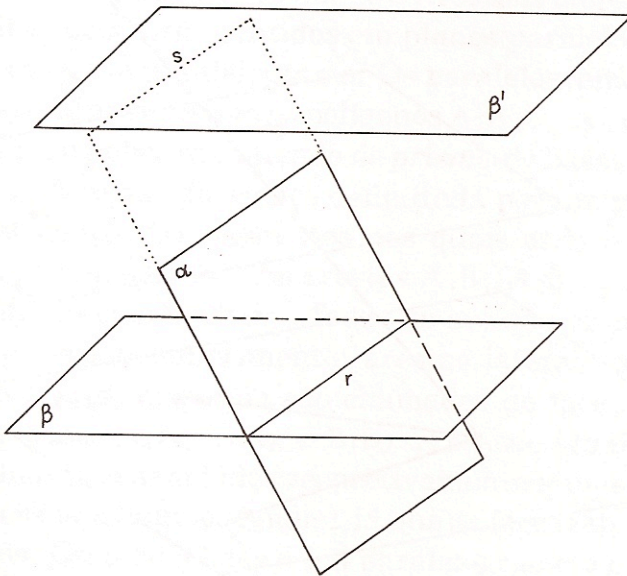
Fig. 5.6 - Planos paralelos cortados por um plano secante

O teorema a seguir diz o que ocorre quando um plano secante

corta dois planos paralelos.

Teorema. *Se um plano α corta um plano β segundo uma reta r, ele corta um plano paralelo a β segundo uma reta paralela a r.*

Demonstração: Seja β' um plano paralelo a β (Figura 5.6). O plano α é distinto de β' (por cortar um plano paralelo a β') e não é paralelo a β', já que por um ponto qualquer de r passa um único plano (β) paralelo a β'. Logo, α corta β' segundo uma reta s. As retas r e s são coplanares e não têm pontos comuns, por estarem em planos paralelos. Logo, s é paralela a r. □

Utilizaremos as ferramentas desenvolvidas nesta seção para algumas construções fundamentais.

Construção de sistemas de coordenadas para o espaço tridimensional. Começamos com dois eixos OX e OY de mesma origem O e tomamos um terceiro eixo OZ não contido no plano dos dois primeiros (Figura 5.7).
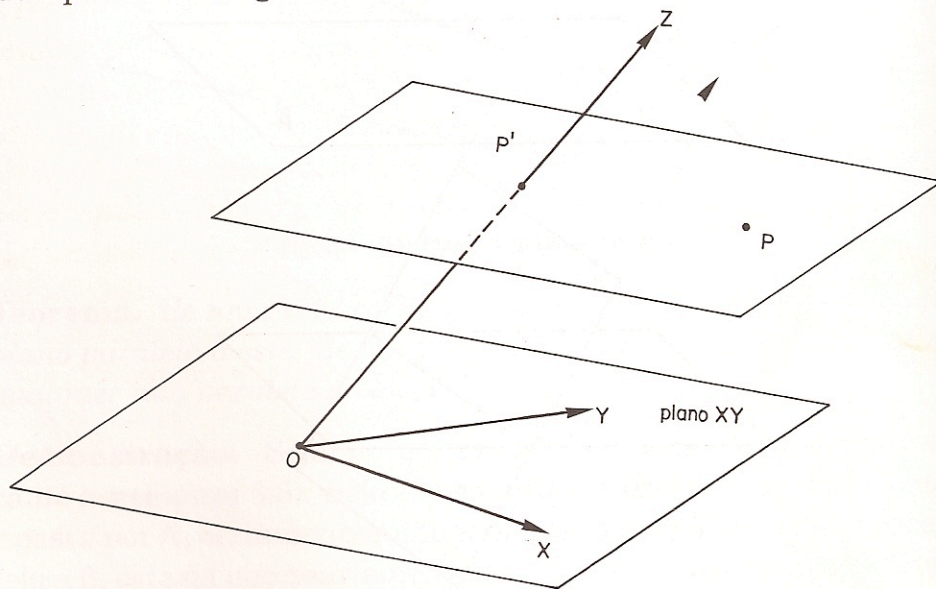
Fig. 5.7 - Sistema de coordenadas para o espaço tridimensional

Dois a dois, os três eixos determinam três planos, que chamare-

mos de OXY, OXZ e OYZ. Dado um ponto qualquer P do espaço, conduzimos por ele um plano paralelo ao plano OXY. Como a reta OZ é secante ao plano OXY, ela também é secante a cada plano paralelo a OXY. Logo, o plano conduzido por P e paralelo a OXY corta OZ em um único ponto, que permite definir uma das coordenadas de P. As demais coordenadas são definidas analogamente. Na prática, ao criarmos um sistema de eixos para o espaço, preferimos utilizar retas mutuamente perpendiculares, como veremos posteriormente.

Construção de prismas. Seja $A_1A_2\ldots A_n$ um polígono contido em um plano α (Figura 5.8). Escolhemos um ponto B_1 qualquer, não pertencente a α. Por B_1 traçamos o plano β paralelo a α. Pelos demais vértices $A_2, \ldots, A_n$ traçamos retas paralelas a A_1B_1 que cortam β nos pontos B_2, ..., B_n. Tomemos dois segmentos consecutivos assim determinados: $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$, por exemplo. O quadrilátero $A_1B_1B_2A_2$ é plano, já que os lados $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$ são paralelos. Mas isto implica em que os outros dois lados também sejam paralelos, pois estão contidos em planos paralelos. Portanto, o quadrilátero é um paralelogramo. Os paralelogramos assim determinados, juntamente com os polígonos $A_1A_2\ldots A_n$ e $B_1B_2\ldots B_n$ determinam um poliedro chamado de *prisma* de bases $A_1A_2\ldots A_n$ e $B_1B_2\ldots B_n$. A região do espaço delimitada por um prisma é formada pelos pontos dos segmentos nos quais cada extremo está em um dos polígonos-base. As arestas $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ são chamadas de arestas laterais. Todas as arestas laterais são paralelas e de mesmo comprimento; arestas laterais consecutivas formam paralelogramos, que são chamados de faces laterais do prisma. As bases $A_1A_2\ldots A_n$ e $B_1B_2\ldots B_n$ são iguais. De fato, estes polígonos possuem lados respectivamente iguais e paralelos (portanto possuem ângulos iguais), já que as faces laterais são paralelogramos. Quando a base é um paralelogramo o prisma é um paralelepípedo, que já construímos de uma outra forma na seção 3. Paralelepípedos são prismas que têm a particularidade de que qualquer de suas faces pode ser tomada como base (duas faces

opostas quaisquer são iguais e paralelas).
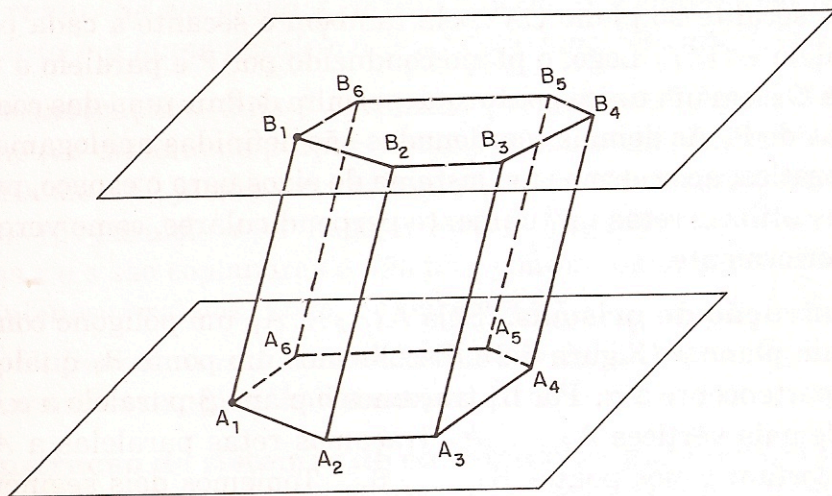
Fig. 5.8 - Prismas

Exemplo. Vamos tomar três pontos M, N e P em três arestas paralelas $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ e $\overline{DH}$ de um paralelepípedo ABCDEFGH e estudar a seção determinada no paralelepípedo pelo plano definido por estes três pontos. Como duas faces opostas de um paralelepípedo são paralelas, qualquer plano que corte estas faces o faz segundo retas paralelas. Este fato será fundamental para o estudo da seção. Para fixar as idéias, suponhamos que as medidas das arestas do paralelepípedo sejam $\overline{AB} = \overline{AD} = 6$ e $\overline{AE} = 5$. Vamos examinar diversas situações.

1º caso: $M = H$, $N = A$, $P = F$ (Figura 5.9)

Neste caso, o plano MNP corta apenas três faces do paralelepípedo, determinando como seção o triângulo AFH.

2º caso: $M = A$, $\overline{BN} = 1$, $\overline{DP} = 3$ (Figura 5.10)

Já temos a interseção do plano MNP com as faces ABFE e ADHE, que são os segmentos $\overline{AN}$ e $\overline{AP}$, respectivamente. Vejamos

o que ocorre na face CDHG. Como esta face é paralela a ABFE, a interseção do plano MNP com esta face estará na reta paralela a $\overline{AN}$ passando por P, que corta $\overline{CG}$ em Q. Seja PQ′ a paralela a CD traçada por P. O triângulo PQ′Q é igual ao triângulo ABN (caso ALA) e portanto $\overline{QQ'} = \overline{BN} = 1$. O quadrilátero PQ′CD é um paralelogramo. Logo, $\overline{CQ'} = 3$. Assim, o plano MNP corta a aresta $\overline{CG}$ em um ponto Q tal que

$$\overline{DQ} = \overline{CQ'} + \overline{QQ'} = 4.$$
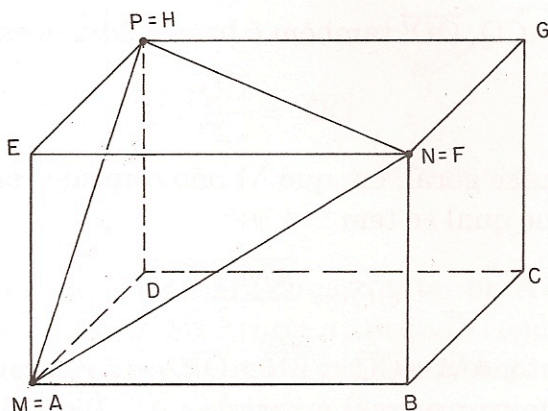
Fig. 5.9
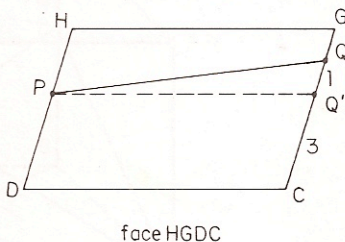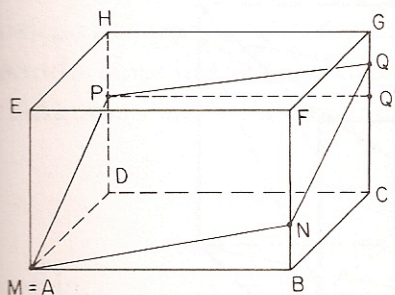
Fig. 5.10

A seção é o quadrilátero MNQP, que é um paralelogramo, já

que os lados opostos são respectivamente paralelos.

Na verdade, o fato de o quadrilátero MNPQ ser um paralelogramo pode ser explorado para calcular, de um outro modo, o segmento $\overline{DQ}$. Para tal, basta considerar as diagonais $\overline{PN}$ e $\overline{MQ}$ de MNPQ, que se cortam ao meio em um ponto O′. Da mesma forma, as diagonais de ABCD se cortam ao meio em O (Figura 5.11). No trapézio BNDP, $\overline{OO'}$ é base média. Logo,

$$\overline{OO'} = \frac{\overline{BN} + \overline{DP}}{2}.$$

No triângulo ACQ, $\overline{OO'}$ também é base média e, assim,

$$\overline{OO'} = \frac{\overline{CQ}}{2}.$$

Note que, no caso geral, em que M não coincide com A, AMCQ é um trapézio, no qual se tem

$$\overline{OO'} = \frac{\overline{AM} + \overline{CQ}}{2}.$$

Temos, portanto, $\overline{AM} + \overline{CQ} = \overline{BN} + \overline{DP}$ (esta relação é válida para qualquer plano transversal às arestas $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$). Logo: $0 + \overline{CQ} = 1 + 3$ e, portanto, $\overline{CQ} = 4$.
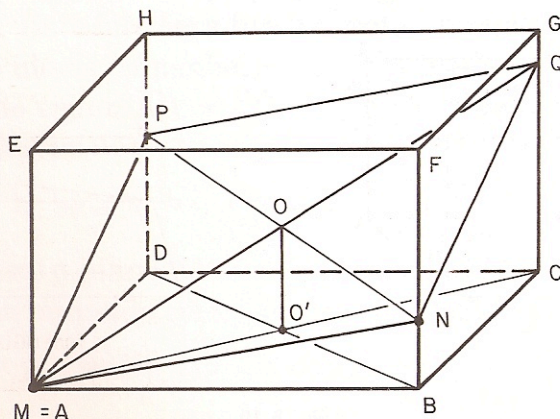
Fig. 5.11

3º caso: $M = A$, $\overline{BN} = 3$, $\overline{DP} = 3$ (Figura 5.12)
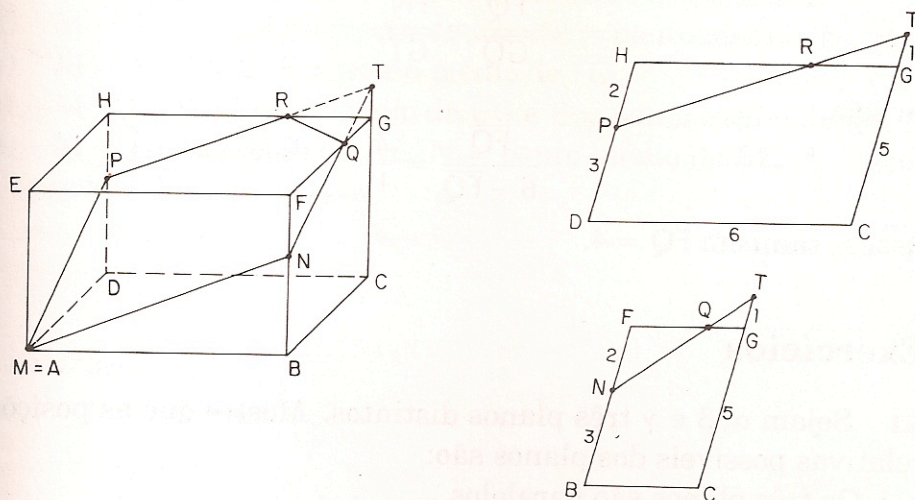
Fig. 5.12

A situação é parecida com a do caso anterior. A diferença é que a paralela a $\overline{AN}$ traçada por P corta a aresta $\overline{CG}$ em um ponto T em seu prolongamento. De fato, empregando o mesmo método do caso anterior, vemos que $\overline{CT} = 6$. Isto significa que o plano da seção não mais corta a aresta $\overline{CG}$. A seção não é mais um quadrilátero, como no caso anterior, mas um pentágono MNQRP, onde Q e R são os pontos de interseção do plano MNP com as arestas $\overline{FG}$ e $\overline{GH}$. A posição dos pontos Q e R sobre estas arestas pode ser determinada usando semelhança de triângulos. No plano da face CDHG os triângulos PHR e TGR são semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{RH}}{\overline{RG}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{TG}},$$

ou seja,

$$\frac{\overline{RH}}{6 - \overline{RH}} = \frac{2}{1}.$$

Logo, $\overline{RH} = 4$. No plano da face BCGF os triângulos NFQ e TGQ

são semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{FQ}}{\overline{GQ}} = \frac{\overline{FN}}{\overline{GT}},$$

ou seja,

$$\frac{\overline{FQ}}{6-\overline{FQ}} = \frac{2}{1}.$$

Assim, também $\overline{FQ} = 4$.

Exercícios

5.1 Sejam α, β e γ três planos distintos. Mostre que as posições relativas possíveis dos planos são:

a) Os três planos são paralelos.
b) Dois deles são paralelos e o terceiro é secante a ambos, cortando-os segundo retas paralelas.
c) Os três planos se cortam segundo uma reta.
d) Os três planos se cortam dois a dois segundo três retas paralelas.
e) Os três planos se cortam dois a dois segundo três retas concorrentes; o ponto comum às três retas é o único ponto comum aos três planos.

5.2 Seja r uma reta secante a um plano α e P um ponto exterior a α. Mostre que existe uma única reta que passa por P, encontra r e é paralela a α.

5.3 Sejam r e s duas retas reversas. Construa um par de planos paralelos contendo r e s, respectivamente.

5.4 Por um ponto qualquer da aresta $\overline{AB}$ de um tetraedro qualquer $ABCD$ é traçado um plano paralelo às arestas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Mostre que a seção determinada por este plano no tetraedro é um paralelogramo.

5.5 Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo tal que $\overline{AB} = \overline{AD} =$

$\overline{AE} = 6$. Estude as seções determinadas neste paralelepípedo pelos planos definidos pelos ternos de pontos (M, N, P) abaixo:

a) $M = A$, $N =$ ponto médio de $\overline{CG}$ e $P =$ ponto médio de $\overline{DH}$
b) $M = A$, $N = C$, $P =$ ponto médio de $\overline{FG}$
c) $M = A$, $N =$ ponto médio de $\overline{CG}$ e $P =$ ponto médio de $\overline{FG}$
d) $M =$ ponto médio de $\overline{AE}$, $N =$ ponto médio de $\overline{BC}$, $P =$ ponto médio de $\overline{GH}$

6. Planos paralelos e proporcionalidade

O Teorema de Tales – a respeito da proporcionalidade dos segmentos determinados em duas secantes por um feixe de retas paralelos – é um dos teoremas fundamentais da Geometria Plana. Os casos de semelhança de triângulos, por exemplo, decorrem dele. Na Geometria Espacial, existe um análogo ao Teorema de Tales para feixes de planos paralelos.

Para demonstrá-lo, precisaremos do seguinte fato: *dois segmentos de retas paralelas compreendidas entre planos paralelos são iguais*. Na verdade, já demonstramos este fato quando construímos prismas na seção anterior. Mas repetimos aqui o argumento. Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos paralelos compreendidos entre os planos α e β (Figura 6.1), então o quadrilátero ABDC é plano. Logo, as retas AC e BD são paralelas, já que não têm ponto comum por estarem situadas em planos paralelos. Portanto ABDC é um paralelogramo e $\overline{AB} = \overline{CD}$.
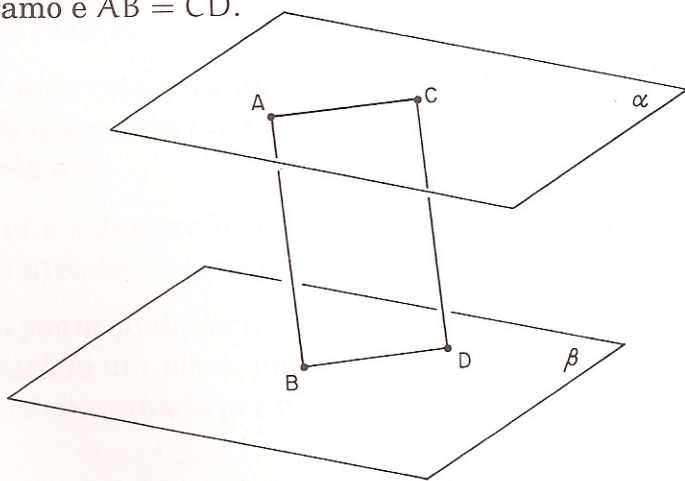
Fig. 6.1 - Segmentos de retas paralelas entre planos paralelos

Teorema. *Um feixe de planos paralelos determina segmentos proporcionais sobre duas retas secantes quaisquer.*

Demonstração: A demonstração consiste em reduzir o teorema para o seu correspondente no plano, que é o teorema de Tales sobre feixe de retas paralelas. Sejam α, β e γ três planos paralelos e sejam r_1 e r_2 duas retas secantes quaisquer (Figura 6.2). A reta r_1 corta os planos nos pontos A_1, B_1 e C_1 e r_2 corta os mesmos planos nos pontos A_2, B_2 e C_2. Pelo ponto A_1 de r_1 traçamos uma reta $r_{2'}$ paralela a r_2, que corta os três planos nos pontos $A_1, B_{2'}$ e $C_{2'}$. As retas r_1 e $r_{2'}$ determinam um plano, que corta β e γ segundo as retas paralelas $B_1B_{2'}$ e $C_1C_{2'}$. Logo, pelo Teorema de Tales para retas paralelas, temos

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1B_{2'}}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_{2'}C_{2'}}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1C_{2'}}}.$$
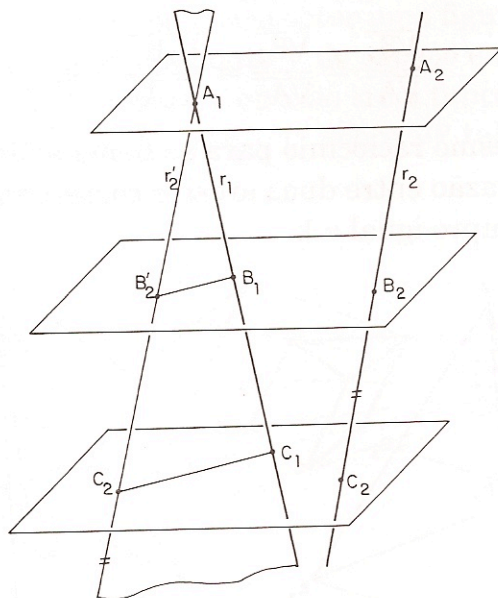
Fig. 6.2 - Teorema de Tales para planos paralelos

Mas $\overline{A_1B_{2'}} = \overline{A_2B_2}$, $\overline{B_{2'}C_{2'}} = \overline{B_2C_2}$ e $\overline{A_1C_{2'}} = \overline{A_2C_2}$, por serem

segmentos de retas paralelas compreendidos entre retas paralelas. Logo, temos

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_2C_2}}.$$

□

Construção de pirâmides semelhantes. Consideremos agora uma pirâmide de base $A_1A_2 \ldots A_n$ e vértice V (Figura 6.3). Tracemos um plano paralelo à base, que corta as arestas laterais segundo o polígono $B_1B_2 \ldots B_n$ e que divide a pirâmide em dois poliedros: um deles é a pirâmide de base $B_1B_2 \ldots B_n$ e o outro é chamado de *tronco de pirâmide* de bases $A_1A_2 \ldots A_n$ e $B_1B_2 \ldots B_n$. Consideremos as duas pirâmides e examinemos suas faces laterais. Na face lateral VA_1A_2, por exemplo, o segmento $\overline{B_1B_2}$ é paralelo à base. Em conseqüência, o triângulo VB_1B_2 é semelhante ao triângulo VA_1A_2. Logo, temos

$$\frac{\overline{VB_1}}{\overline{VA_1}} = \frac{\overline{VB_2}}{\overline{VA_2}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{A_1A_2}} = k.$$

Aplicando o mesmo raciocínio para as demais faces laterais, concluímos que a razão entre duas arestas correspondentes das duas pirâmides é sempre igual a k.
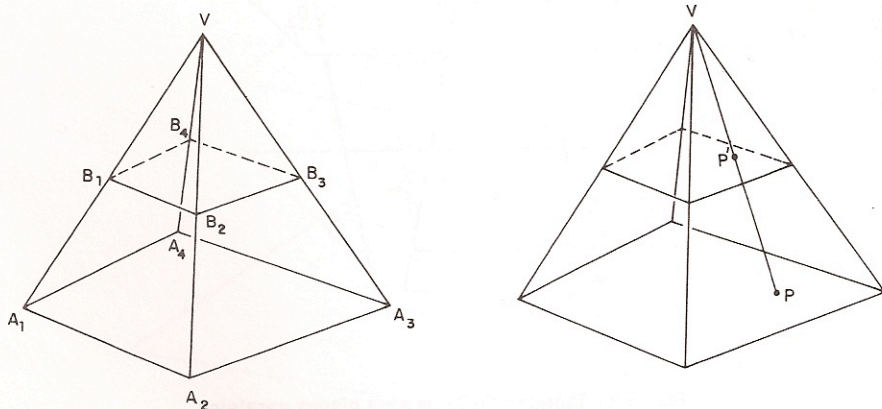
Fig. 6.3 - Seccionando uma pirâmide por um plano paralelo à base

Na verdade, as duas pirâmides do exemplo são *semelhantes na razão* k, ou seja, é possível estabelecer uma correspondência entre seus pontos de modo que a razão entre os comprimentos de segmentos correspondentes nas duas figuras seja constante.

Esta correspondência é estabelecida da seguinte forma: dado um ponto P da pirâmide $VA_1A_2\ldots A_n$ seu correspondente na pirâmide $VB_1B_2\ldots B_n$ é o ponto P' sobre VP tal que $\frac{\overline{VP'}}{\overline{VP}} = k$. O ponto P' certamente pertence à segunda pirâmide. Além disso, tomando um segundo par de pontos correspondentes Q e Q', os triângulos $VP'Q'$ e VPQ são semelhantes na razão k, o que implica em $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = k$. Logo, a razão entre segmentos correspondentes nas duas pirâmides é sempre igual a k, o que demonstra a sua semelhança.

O que fizemos acima pode ser visto de maneira mais geral e transformado em um método para obter uma figura semelhante a uma figura dada. Dado um ponto V do espaço e um número real $k \neq 0$, a homotetia de centro V e razão k é a função σ que associa a cada ponto P do espaço o ponto P' sobre VP tal que $\overline{VP'} = \overline{kVP}$ (Figura 6.4).
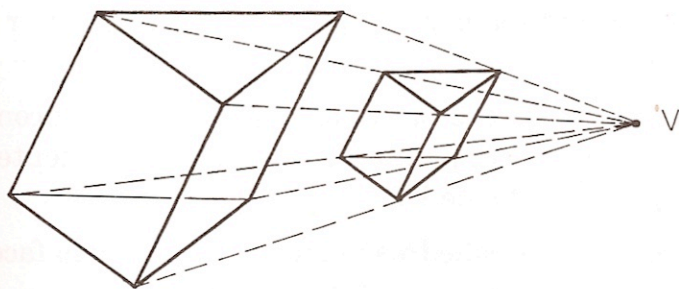
Fig. 6.4 - Figuras homotéticas

Duas figuras F e F' são homotéticas quando existe uma homotetia σ tal que $\sigma(P) = P'$. Assim, as duas pirâmides do exemplo

anterior são homotéticas. *Duas figuras homotéticas são sempre semelhantes*, pelo mesmo argumento utilizado acima: dados dois pontos P e Q em F, seus correspondentes P' e Q' em F' são tais que os triângulos $VP'Q'$ e VPQ são semelhantes na razão k.

Exercícios

6.1 Seja P um ponto exterior a um plano α. Para cada ponto Q de α seja X o ponto do segmento $\overline{PQ}$ que o divide na razão

$$\frac{\overline{XP}}{\overline{XQ}} = k.$$

Qual é o lugar geométrico do ponto X quando Q percorre o plano α?

6.2 Considere dois planos α e β. Qual é o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos cujos extremos estão nas retas r e s? Examine todas as possíveis posições relativas de r e s.

6.4 Considere uma reta r e um plano α. Qual é o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos cujos extremos estão em r e α, respectivamente? Examine todas as possíveis posições relativas de r e α.

6.5 Dada uma reta r secante ao plano α e um ponto P exterior a r e a α, construir um segmento cujos extremos estão em r e α e cujo ponto médio seja P.

6.6 Dadas as retas reversas duas a duas r, s e t, encontrar uma reta que as encontre nos pontos R, S e T, respectivamente, de modo que S seja ponto médio de $\overline{RT}$.

6.7 Mostre que dois poliedros homotéticos possuem faces respectivamente paralelas.

6.8 Verifique, através de um exemplo, que dois poliedros com arestas respectivamente proporcionais não são necessariamente semelhantes. Mostre, porém, que dois tetraedros de arestas respectivamente proporcionais são semelhantes.

6.9 Seja um tetraedro qualquer, no qual A', B', C' e D' são os baricentros das faces opostas aos vértices A, B, C e D.

a) Mostre que as retas AA' e BB' são concorrentes.

b) Mostre que o ponto G comum a AA' e BB' é tal que

$$\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}} = \frac{1}{3}.$$

c) Conclua que as quatro retas AA', BB', CC' e DD' se encontram no ponto A.

d) Mostre que o tetraedro $A'B'C'D'$ é homotético ao tetraedro $ABCD$. Qual é o centro de homotetia? Qual é a razão da homotetia?

7. Perpendicularismo de reta e plano

Introduzimos agora o conceito de reta perpendicular a um plano. Esta noção é fundamental para a Geometria do Espaço. Na realidade, talvez a forma mais intuitiva de passar do plano para o espaço seja conduzir uma reta perpendicular ao plano da Geometria Plana. É exatamente o que fazemos quando estendemos um sistema de coordenadas bidimensionais para um sistema de coordenadas tridimensionais. Entre as construções mais fundamentais da Geometria Espacial estão conduzir uma reta perpendicular a um plano passando por um ponto (e sua "dual", que consiste em traçar um plano perpendicular a uma reta por um ponto). Mostraremos nesta seção que é possível fazer tais construções.

Definição: *Diz-se que uma reta é perpendicular a um plano quando ela é ortogonal a toda reta contida no plano (Figura 7.1).*
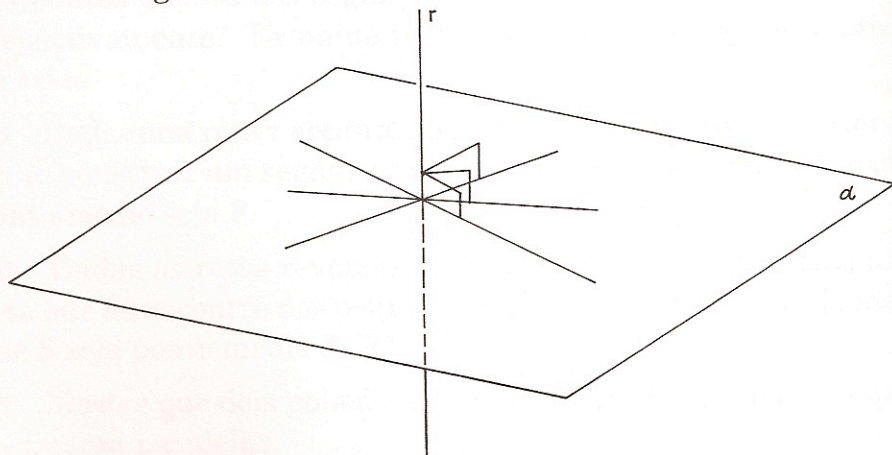
Fig. 7.1 - Uma reta perpendicular a um plano

Observe que para r ser perpendicular a α basta, na verdade, que ela seja perpendicular às retas de α que passam pelo seu ponto A de interseção com α; se isto ocorrer, ela será necessariamente

ortogonal a qualquer outra reta de α, já que toda reta de α possui uma paralela passando por A.

Este tipo de argumento pode ser utilizado para obter algumas relações importantes entre paralelismo e perpendicularismo.

(1) *Se a reta* r *e o plano* α *são perpendiculares, toda reta* r' *paralela a* r *é perpendicular a* α*; todo plano* α' *paralelo a* α *é perpendicular a* r.

(2) *Duas retas distintas* r *e* r' *perpendiculares a um mesmo plano são paralelas; dois planos distintos* α *e* β *perpendiculares a uma mesma reta* r *são paralelos (Figura 7.2).*
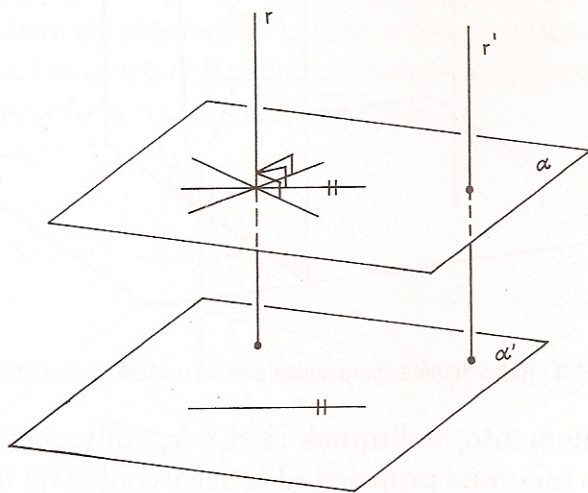
Fig. 7.2 - Retas paralelas perpendiculares a planos paralelos

As demonstrações das afirmativas em (1) são imediatas e deixadas por conta do leitor. A demonstração das propriedades em (2) é muito mais sutil (isto ocorre porque para demonstrar as afirmativas em (2) precisamos usar a tridimensionalidade do espaço). Suponhamos que r e r' sejam ambas perpendiculares ao plano α e que r e r' não sejam paralelas (Figura 7.3). Pelo ponto de interseção de r' e α traçamos a reta r'', paralela a r. Como r' não é paralela a r, as retas r' e r'' são distintas e determinam um plano β, que corta α segundo a reta s. Como r' e r'' são ambas perpendiculares

a α, resulta que r' e r'' são ambas perpendiculares a s. Mas isto significa que, no plano β, existem duas perpendiculares à reta t passando pelo mesmo ponto, o que é uma contradição. Logo, se as retas r e r' são ambas perpendiculares a α, então elas são necessariamente paralelas entre si. A demonstração da outra afirmativa em (2) é análoga e também fica como exercício.
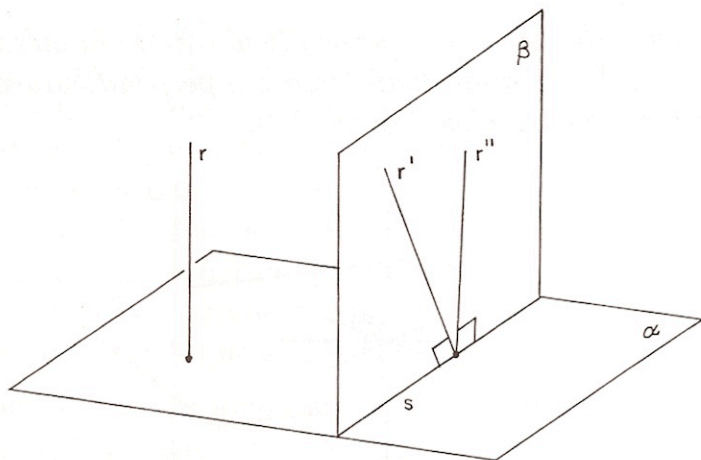
Fig. 7.3 - Retas distintas perpendiculares ao mesmo plano são paralelas

Até o momento, definimos reta perpendicular a um plano e enunciamos algumas propriedades decorrentes da definição. Mas não demonstramos ainda que tais objetos existem. Dado um plano, existem de fato retas que são perpendiculares a ele? Observe que a definição de reta perpendicular a um plano exige bastante da reta, pois pede que ela seja ortogonal a todas as retas do plano. Existem mesmo retas e planos com esta propriedade? Nossa intuição nos diz que sim, mas o próximo teorema será crucial para demonstrar que isto é verdade. Neste teorema, mostraremos que para que uma reta seja perpendicular a um plano basta que ela seja perpendicular a duas retas concorrentes do plano. Isto faz com que, de posse deste teorema, construir um plano perpendicular a uma reta se transforme numa tarefa muito mais simples do que antes: basta

tomar duas retas perpendiculares à reta dada. É exatamente o que faremos após demonstrar este próximo teorema.

Teorema. *Se* r *é ortogonal a um par de retas concorrentes de* α *então* r *é perpendicular a* α.

Demonstração: Sejam s e t duas retas de α que se encontram em A, ambas ortogonais a r. Sem perda de generalidade, podemos supor que r passa por A (senão tomamos uma paralela a r passando por A) (Figura 7.4). Vamos mostrar que toda reta u de α passando por A é perpendicular a r. Se u coincide com s ou t, então u é certamente perpendicular a r. Senão, tomemos uma reta v de α tal que seu ponto de interseção U com u esteja entre os pontos de interseção S e T com s e t. Em cada semiplano determinado por α tomemos pontos A_1 e A_2 tais que $\overline{AA_1} = \overline{AA_2}$.
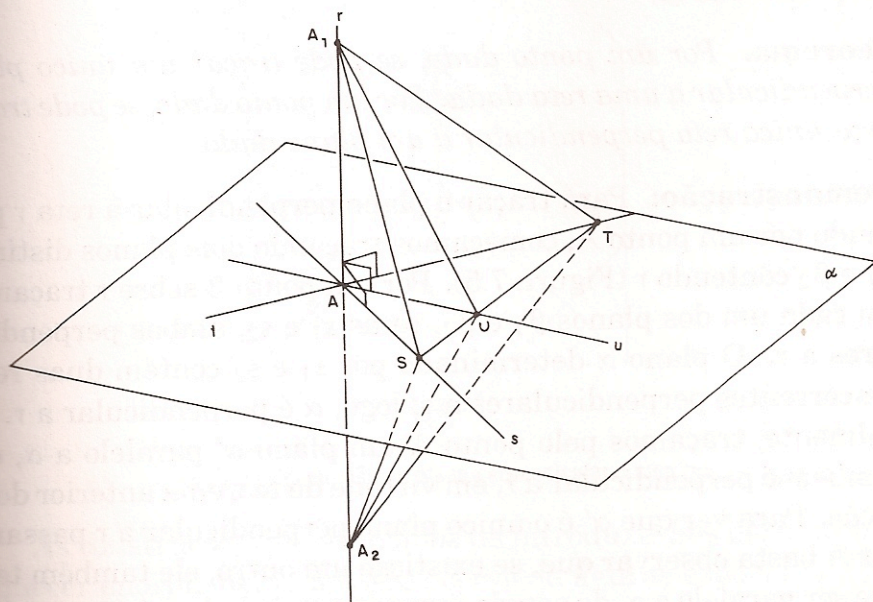
Fig. 7.4 - Condição para perpendicularismo de reta e plano

Os triângulos retângulos A_1AS e A_2AS são certamente iguais, já que $\overline{A_1A} = \overline{A_2A}$ e o cateto $\overline{AS}$ é comum. Logo, $\overline{A_1S} = \overline{A_2S}$.

Analogamente, os triângulos A_1AT e A_2AT são iguais, daí resultando $\overline{A_1T} = \overline{A_2T}$. Examinando, então, os triângulos A_1ST e A_2ST, observamos que o lado $\overline{ST}$ é comum e os demais lados são respectivamente iguais. Portanto, estes triângulos são iguais. Mas da igualdade de A_1ST e A_2ST resulta também a igualdade de A_1SU e A_2SU ($\overline{SU}$ é comum, $\overline{A_1S} = \overline{A_2S}$ e os ângulos $\widehat{A_1SU}$ e $\widehat{A_2SU}$ são iguais). Logo, $\overline{A_1U} = \overline{A_2U}$ e, daí, os triângulos A_1AU e A_2AU são iguais, por possuírem lados respectivamente iguais. Mas isto acarreta a igualdade dos ângulos $\widehat{A_1AU}$ e $\widehat{A_2AU}$. Como A_1, A e A_2 são colineares, cada um daqueles ângulos é necessariamente reto. Ou seja, u é perpendicular a r.

Assim, provamos que toda reta de α passando por A é perpendicular a r e, portanto, que r e α são perpendiculares. □

Estamos prontos, finalmente, para construir retas e planos perpendiculares.

Teorema. *Por um ponto dado, se pode traçar um único plano perpendicular a uma reta dada. Por um ponto dado, se pode traçar uma única reta perpendicular a um plano dado.*

Demonstração: Para traçar o plano perpendicular à reta r passando por um ponto A, começamos traçando dois planos distintos β_1 e β_2 contendo r (Figura 7.5). Por um ponto B sobre r traçamos, em cada um dos planos β_1 e β_2, retas s_1 e s_2, ambas perpendiculares a r. O plano α determinado por s_1 e s_2 contém duas retas concorrentes perpendiculares a r; logo, α é perpendicular a r. Finalmente, traçamos pelo ponto A um plano α' paralelo a α, que também é perpendicular a r, em virtude de teorema anterior desta seção. Para ver que α' é o único plano perpendicular a r passando por A basta observar que, se existisse um outro, ele também teria que ser paralelo a α, de acordo com as propriedades vistas no início desta seção. Mas só existe um plano paralelo a α passando por A.

Vejamos, agora, como construir a reta perpendicular ao plano α passando pelo ponto A. Sobre α tomamos duas retas concorrentes e traçamos os planos β_1 e β_2, perpendiculares a estas retas

e contendo seu ponto de interseção (Figura 7.6). Sejam s_1 e s_2 as retas de interseção de β_1 e β_2 com α e seja r a reta de interseção de β_1 e β_2. A reta r é perpendicular às retas s_1 e s_2, por estar contida em planos que são perpendiculares a cada uma delas. Portanto, r é perpendicular a α. Finalmente, traçamos por A a paralela r' a r, que é perpendicular a α pelas propriedades enunciadas no início desta seção. Para a unicidade, basta observar que uma outra reta perpendicular a α passando por A teria que ser também paralela a r'. Mas existe uma única paralela a r passando por A. □
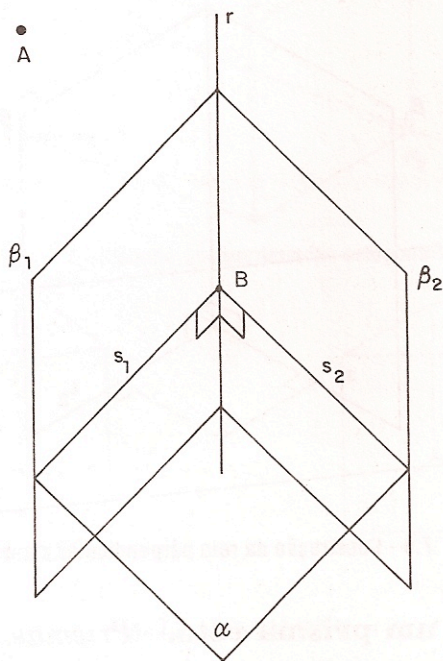
Fig. 7.5 - Construção do plano perpendicular a uma reta

As construções que acabamos de introduzir nos permitem enriquecer enormemente o nosso acervo de figuras espaciais.

Construção de um sistema ortogonal de coordenadas. Podemos modificar o sistema de coordenadas tridimensional introduzido na seção 5, tomando os eixos OX, OY e OZ mutuamente perpendiculares. Isto corresponde a tomar o sistema de coordenadas

retangulares da Geometria Plana e acrescentar um terceiro eixo perpendicular ao plano dos dois primeiros. Como vimos na seção 5, as coordenadas de cada ponto P do espaço são obtidas conduzindo planos paralelos ao plano definido por dois dos eixos e obtendo a interseção com o terceiro eixo. No caso de eixos perpendiculares, isto equivale a conduzir por P planos α, β e γ perpendiculares a cada eixo e obter as interseções P_1, P_2 e P_3 destes planos com o eixo correspondente (Figura 7.7). Como veremos mais tarde, isto é o mesmo que obter a *projeção ortogonal* de P sobre cada eixo.
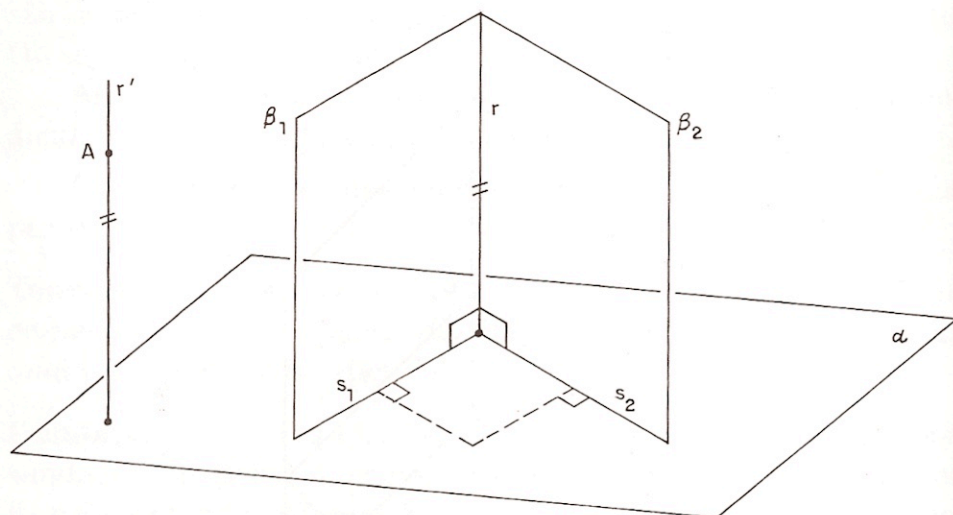
Fig. 7.6 - Construção da reta perpendicular a um plano

Construção de um prisma reto. *Prismas retos* são prismas obtidos tomando, para as arestas laterais, retas perpendiculares ao plano da base (Figura 7.8a). Em conseqüência, as faces laterais são retângulos. Há diversos casos particulares importantes. Quando a base é um polígono regular obtemos um prisma *regular*. Quando a base é um retângulo obtemos um *paralelepípedo retângulo* (ou *bloco retangular*), no qual cada face é um retângulo (assim, um paralelepípedo retângulo é um prisma reto onde qualquer face serve como base). Ainda mais especial é o caso do *cubo* – ou *hexaedro regular* –, paralelepípedo retângulo no qual cada face

é um quadrado (Figura 7.8b).
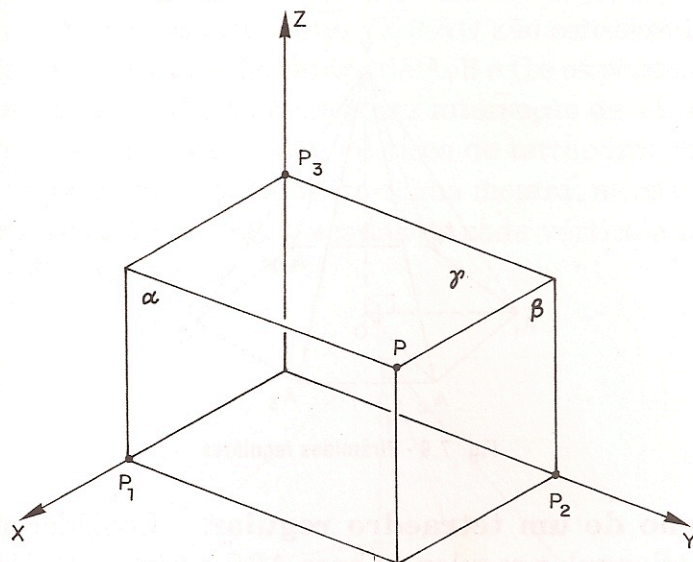
Fig. 7.7 - Sistema de coordenadas ortogonais
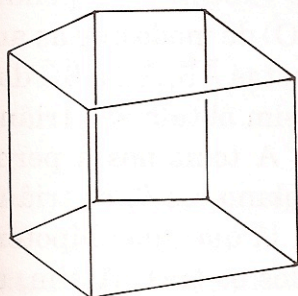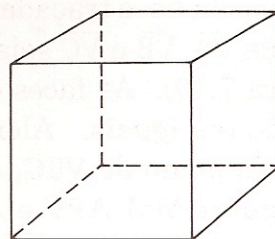
Fig. 7.8 - Prismas retos

Construção de pirâmides regulares. São construídas tomando um polígono regular $A_1A_2 \ldots A_n$ como base e escolhendo como vértice um ponto V situado sobre a perpendicular ao plano do polígono conduzida pelo seu centro O (Figura 7.9). Os triângulos retângulos VOA_1, VOA_2, ..., VOA_n são triângulos retângulos iguais, por possuírem catetos respectivamente iguais (VO é comum a todos e $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = \ldots = \overline{OA_n}$, já que O é o centro do polígono). Em conseqüência $\overline{VA_1} = \overline{VA_2} = \ldots = \overline{VA_n}$, o que faz com que as

faces laterais sejam triângulos isósceles iguais.
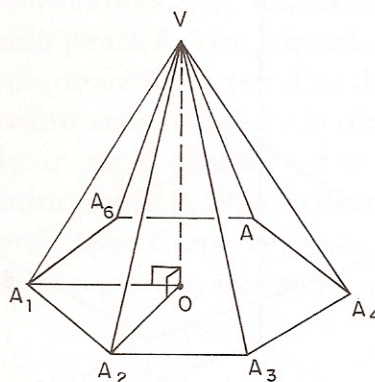
Fig. 7.9 - Pirâmides regulares

Construção de um tetraedro regular. Consideremos uma pirâmide triangular regular de base ABC e vértice V. Um tetraedro regular é obtido escolhendo o vértice V (sobre a perpendicular ao plano da base traçada por seu centro O) de modo que as arestas laterais $\overline{VA}, \overline{VB}$ e $\overline{VC}$ sejam iguais às arestas $\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{BC}$ da base (Figura 7.10). As faces da pirâmide assim obtida são triângulos equiláteros iguais. Além disso, se por A tomamos a perpendicular ao plano de VBC, que corta este plano em P, os triângulos retângulos APB, APV e APC são iguais, já que suas hipotenusas são iguais e o cateto $\overline{AP}$ é comum a todos os três. Assim, temos $\overline{PB} = \overline{PC} = \overline{PV}$. Logo, P é o centro do triângulo equilátero VBC, o que faz com que a pirâmide seja regular qualquer que seja a face tomada como base.

A Figura 7.10 sugere que as retas VO e AP (isto é, as retas perpendiculares a duas faces do tetraedro regular traçadas pelo vértice oposto a cada uma destas faces) sejam coplanares. De fato isto ocorre. Consideremos o plano α determinado pela reta VO e pelo vértice A. Este plano corta o plano da base ABC segundo a reta AO. Mas como ABC é um triângulo equilátero de centro O, AO corta o lado $\overline{BC}$ em seu ponto médio M. Logo, a altura $\overline{VM}$ da face VBC está contida no plano α; em particular, o ponto

P, que é o centro de VBC, está neste plano. Logo, a reta VP está contida em α, o que mostra que VP e AO são concorrentes. Como os pontos de VO são equidistantes de A, B e C e os pontos de AP são equidistantes de V, B e C, o ponto de interseção de VO e AP é um ponto equidistante dos quatro vértices do tetraedro, chamado de *centro* do tetraedro. O argumento acima mostra, na realidade, que as quatro perpendiculares traçadas de cada vértice à face oposta passam todas pelo ponto O.
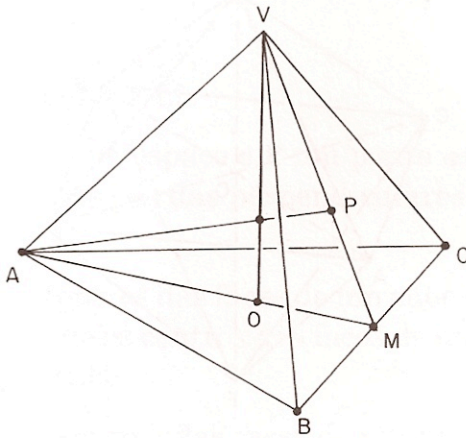
Fig. 7.10 - Tetraedro regular

Construção de um octaedro regular. Um octaedro regular pode ser construído a partir de três segmentos iguais e mutuamente perpendiculares $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ que se cortam no ponto médio O de cada um deles (Figura 7.11). Os segmentos definidos por pares formados por estes seis pontos (exceto os que definem os segmentos originais) são todos iguais. Traçando todos estes segmentos obtemos um poliedro com oito faces triangulares regulares, chamado de octaedro regular. Um octaedro regular pode ser também obtido tomando duas pirâmides quadrangulares regulares iguais em que as faces laterais são triângulos equiláteros e justapondo estas pirâmides através de suas bases.

O tetraedro regular, o hexaedro regular e o octaedro regular

são exemplos de poliedros regulares. Um poliedro regular é um poliedro em que todas as faces são polígonos regulares iguais e todos os vértices sejam incidentes ao mesmo número de arestas. Além dos três poliedros regulares apresentados nesta seção é possível demonstrar que existem apenas dois outros: o dodecaedro regular, com 12 faces pentagonais, e o icosaedro regular, com 20 faces triangulares.
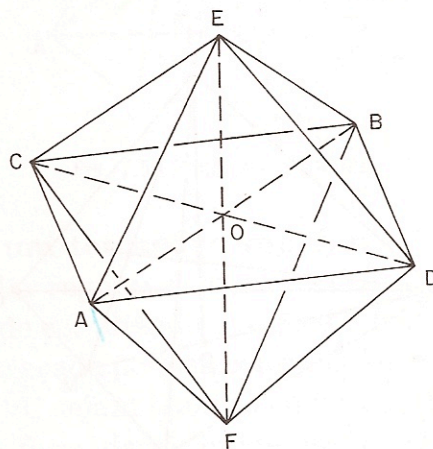
Fig. 7.11 - Octaedro regular

Exercícios

7.1 Demonstre as seguintes propriedades:

a) Seja r uma reta perpendicular ao plano α. Toda reta paralela a r é perpendicular a α; todo plano paralelo a α é perpendicular a r.

b) Dois planos distintos perpendiculares à mesma reta são paralelos entre si.

7.2 Mostre que por um ponto dado se pode traçar uma única reta ortogonal a duas retas não paralelas dadas.

7.3 Demonstre o Teorema das Três Perpendiculares: sejam A, B e C pontos não colineares. Se as retas AB e AC são ortogonais à

reta r, então BC também é ortogonal a r.

7.4 Dois triângulos ABC e BCD são retângulos em B. Mostre que se o cateto $\overline{AB}$ é ortogonal à hipotenusa $\overline{CD}$ então o cateto $\overline{BD}$ é ortogonal à hipotenusa $\overline{AC}$.

7.5 O triângulo ABC, retângulo em A, está contido em um plano α. Sobre a perpendicular a α traçada por C tomamos um ponto D. Por C traçamos, por sua vez, as perpendiculares $\overline{CE}$ e $\overline{CF}$ a AD e BD, respectivamente. Mostre que:

a) AB é perpendicular a AD;

b) CE é perpendicular a EF;

c) DF é perpendicular a EF.

7.6 Seja r uma reta do espaço e P um ponto exterior a r. Qual é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de P aos planos que contém r?

7.7 Mostre que os centros das faces de um cubo são vértices de um octaedro regular e que os centros das faces de um octaedro regular são vértices de um cubo.

7.8 Mostre que os centros das faces de um tetraedro regular são vértices de um outro tetraedro regular. Qual é a razão entre as arestas dos dois tetraedros?

7.9 Sejam $\overline{VA}$, $\overline{VB}$ e $\overline{VC}$ três segmentos mutuamente perpendiculares. Mostre que a projeção de V sobre o plano ABC é o ortocentro do triângulo ABC.

7.10 Pelo vértice A do triângulo ABC traça-se uma perpendicular $\overline{AA'}$ a seu plano. Sejam H e H' os ortocentros dos triângulos ABC e $A'B'C'$. Mostre que HH' é perpendicular ao plano de $A'B'C'$.

7.11. Num tetraedro arbitrário, as 4 alturas são concorrentes se e só se seus pés são os ortocentros das bases.

8. Planos perpendiculares

Tomemos dois planos secantes α e β e tracemos um plano γ perpendicular à sua reta r de interseção, que corta α e β segundo as retas s e t. O ângulo entre s e t não depende da posição escolhida para γ (todos os planos perpendiculares a r são paralelos entre si e, portanto, cortam α e β segundo retas respectivamente paralelas). Quando s e t formam um ângulo reto, dizemos que os planos α e β são *perpendiculares* (Figura 8.1).
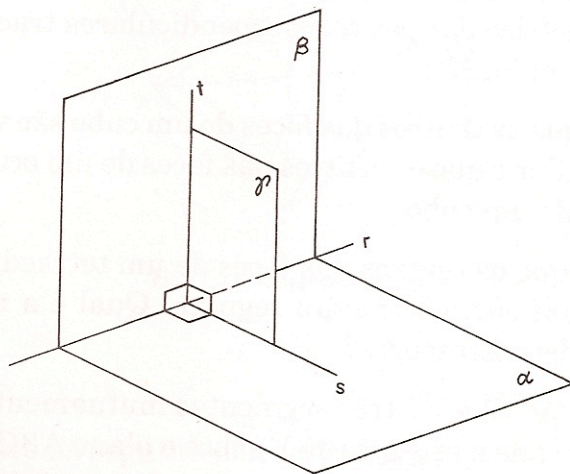
Fig. 8.1 - Planos perpendiculares

Note que, se α e β são perpendiculares, então a reta r de α é perpendicular às retas s e t de β. Logo, r é uma reta de α que é perpendicular a β. Na verdade a existência em um plano de uma reta perpendicular a um outro é condição necessária e suficiente para que os planos sejam perpendiculares.

Teorema. *Dois planos α e β são perpendiculares se e somente se um deles contém uma reta perpendicular ao outro.*

Demonstração: Se α e β são perpendiculares então certamente existe uma reta de α perpendicular a β, conforme explicamos no parágrafo anterior. Por outro lado, suponhamos que uma reta r de α seja perpendicular a β (Figura 8.2). O plano α corta β segundo uma reta t, que é perpendicular a r. Pelo ponto de interseção de r e t traçamos a reta s, contida em β e perpendicular a t. O plano definido por r e s é perpendicular a t, já que contém duas retas que lhe são perpendiculares. Mas r e s são perpendiculares, já que r é perpendicular a β. Portanto, α e β são de fato perpendiculares. □
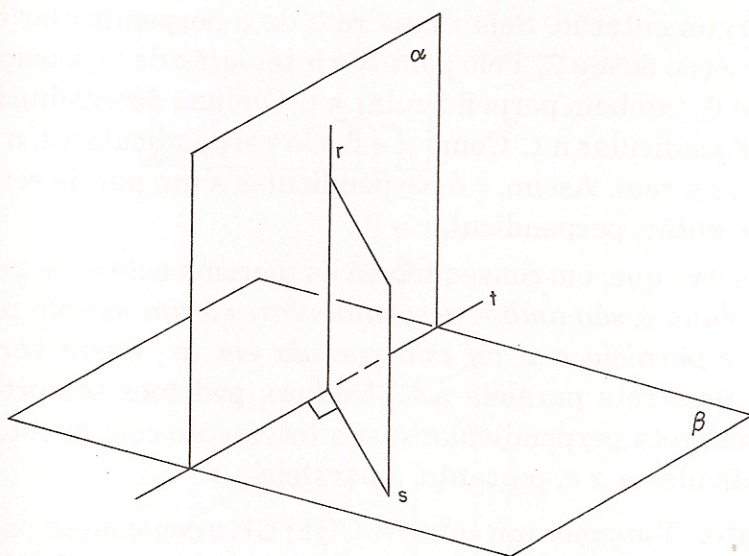
Fig. 8.2 - Critério de perpendicularismo de planos

Nos exemplos vistos no final da seção anterior aparecem vários pares de planos perpendiculares. Por exemplo, os planos OXY, OXZ e OYZ em um sistema ortogonal de coordenadas são mutuamente perpendiculares (cada um deles contém um eixo perpendicular a cada um dos outros dois). As faces laterais de um prisma reto são perpendiculares ao plano da base. O plano contendo as alturas VO e AP do tetraedro regular $VABC$ é perpendicular às

faces ABC e VBC.

Em todos estes exemplos, utilizamos o teorema anterior para estabelecer pares de planos perpendiculares a partir de uma reta perpendicular a um deles. Por outro lado, planos perpendiculares podem ajudar a mostrar que uma reta é perpendicular a um plano, através do teorema a seguir.

Teorema. *Se um plano α é perpendicular a um plano β e a reta r de α é perpendicular à reta de interseção de α e β, então r é perpendicular a β.*

Demonstração: Podemos utilizar novamente a Figura 8.2 em nossa argumentação. Seja r uma reta de α perpendicular à reta t de interseção de α e β. Pelo ponto de interseção de r e s traçamos a reta s de β, também perpendicular a t. O plano determinado por r e s é perpendicular a t. Como α e β são perpendiculares, o ângulo entre r e s é reto. Assim, r é perpendicular a um par de retas s e t de α e é, então, perpendicular a β. □

Observe que, em conseqüência do teorema acima, *se uma reta r e um plano α são ambos perpendiculares a um mesmo plano β, então r é paralela a α ou está contida em α.* Basta ver que α contém uma reta paralela a r. De fato, podemos sempre traçar em α uma reta perpendicular à sua interseção com β; esta reta é perpendicular a α e, portanto, é paralela a r.

Exemplo. Tomemos um cubo ABCDEFGH e consideremos o plano diagonal BFHD (Figura 8.3). Afirmamos que a diagonal AC da face ABCD é perpendicular a este plano. Uma das muitas formas de provar este fato é a seguinte: os planos ABCD e BFHD são perpendiculares, porque a reta BF de BFHD é perpendicular a ABCD; como a diagonal AC é perpendicular à diagonal BD – que é a reta de interseção de ABCD e BFHD – concluímos, pelo teorema anterior, que AC é perpendicular ao plano diagonal BFHD.

Consideremos agora o problema de traçar um plano perpendicular a um plano dado. Se fornecermos apenas um ponto A que o plano deva conter, temos uma infinidade de soluções. Realmente,

basta tomar a reta r perpendicular ao plano dado passando por A. Todo plano contendo esta reta é perpendicular ao plano dado (Figura 8.4).
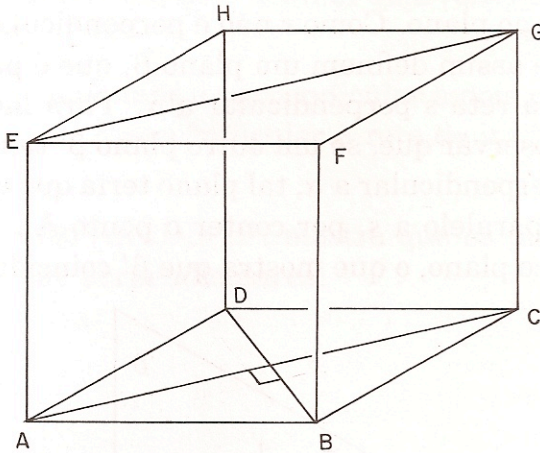
Fig. 8.3
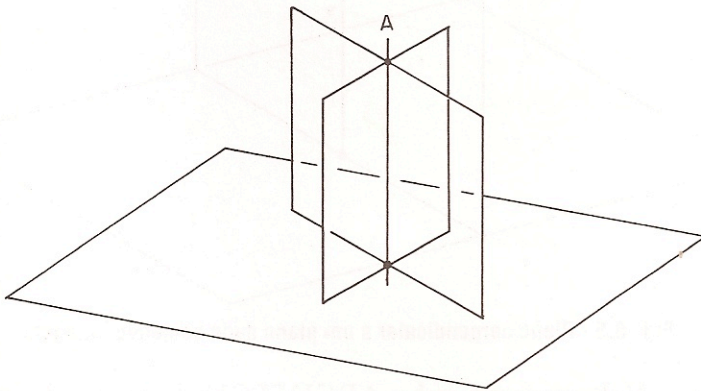
Fig. 8.4 - Planos perpendiculares a um plano dado passando por um ponto dado

No entanto, quando impomos a condição de que o plano perpendicular contenha uma reta não perpendicular ao plano dado, passamos a ter solução única.

Teorema. *Por uma reta não perpendicular a um plano passa um único plano perpendicular a este plano.*

Demonstração: Seja r uma reta não perpendicular a um plano α (Figura 8.5). Por um ponto qualquer A de r traçamos a reta s perpendicular ao plano. Como r não é perpendicular a α, r e s são concorrentes e assim definem um plano β, que é perpendicular a α, por conter a reta s perpendicular a α. Para mostrar que β é único basta observar que, se um outro plano β' também passasse por r e fosse perpendicular a α, tal plano teria que conter s (já que não pode ser paralelo a s, por conter o ponto A). Mas por r e s passa um único plano, o que mostra que β' coincide com β. □
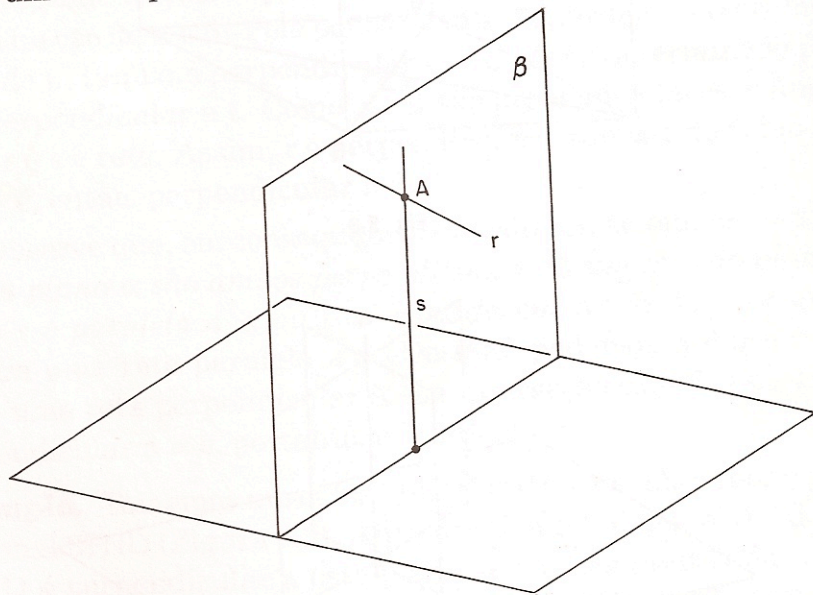
Fig. 8.5 - Plano perpendicular a um plano dado contendo uma reta

Exemplo. Voltemos ao cubo ABCDEFGH do exemplo anterior e consideremos a diagonal BH. O único plano que contém BH e é perpendicular ao plano da face ABCD é o plano diagonal BFHD.

Exercícios

8.1 Mostre que dois planos são perpendiculares se e só se duas

retas respectivamente perpendiculares a cada um deles são ortogonais.

8.2 Mostre que se um plano α contém uma reta perpendicular a um plano β, então o plano β contém uma reta perpendicular ao plano α.

8.3 Mostre que um plano é perpendicular a dois planos secantes se e somente se ele é perpendicular à reta de interseção dos dois planos.

8.4 Em um cubo ABCDEFGH mostre que os planos diagonais ABHG e EFDC são perpendiculares.

9. Aplicações: projeções, ângulos e distâncias

Nesta seção, aplicamos os conceitos desenvolvidos nas seções anteriores para estudar problemas métricos no espaço, envolvendo cálculo de ângulos e distâncias. As ferramentas para tal vêm da Geometria Plana.

Distância entre dois pontos. A *distância* entre dois pontos A e B é simplesmente a medida do segmento AB. No plano, a distância entre dois pontos é freqüentemente obtida utilizando o Teorema de Pitágoras. Isto ocorre porque muitas vezes dispomos das medidas das projeções de um segmento segundo duas direções perpendiculares. Esta situação também ocorre freqüentemente no espaço. Novamente, a ferramenta a utilizar é o Teorema de Pitágoras.

Exemplo. Consideremos o problema de calcular a diagonal $\overline{\mathsf{BH}} = d$ de um paralelepípedo retângulo $\mathsf{ABCDEFGH}$ de arestas $\overline{\mathsf{AB}} = a$, $\overline{\mathsf{AD}} = b$ e $\overline{\mathsf{AE}} = c$ (Figura 9.1). Resolvemos o problema utilizando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos ABD e BDH (este segundo triângulo é retângulo porque $\overline{\mathsf{BH}}$ é perpendicular ao plano da base e, assim, perpendicular à reta BD que está contida nesta base).

Temos:

$$\overline{\mathsf{BD}^2} = a^2 + b^2 \qquad \text{(no triângulo ABD)}$$

$$d^2 = \overline{\mathsf{BD}^2} + c^2 \qquad \text{(no triângulo BDH).}$$

Logo,

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Em particular, a diagonal de um cubo de aresta a mede $d = a\sqrt{3}$.
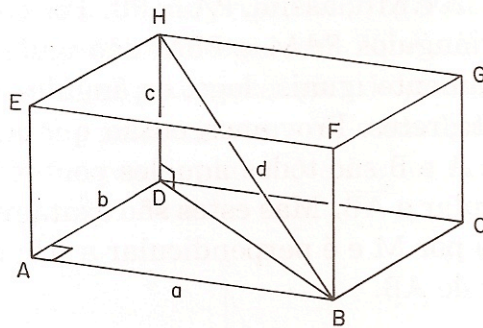
Fig. 9.1 - Diagonal de um paralelepípedo

Plano mediador. Qual é o lugar geométrico dos pontos do espaço que são equidistantes de dois pontos dados A e B?

Sabemos que, no plano, o conjunto dos pontos equidistantes de A e B é a reta mediatriz de $\overline{AB}$; isto é, a perpendicular a $\overline{AB}$ passando pelo seu ponto médio M. A situação é análoga no espaço. Um ponto P do espaço é equidistante de A e B se e somente se PM é perpendicular a $\overline{AB}$ (Figura 9.2).
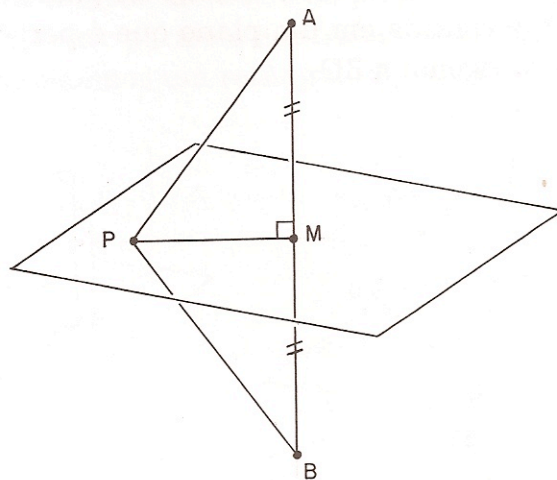
Fig. 9.2 - O plano mediador

De fato, se PM é perpendicular a $\overline{AB}$, os triângulos retângulos PMA e PMB são iguais, por possuírem um cateto comum PM e catetos iguais $\overline{MA}$ e $\overline{MB}$; assim, $\overline{PA} = \overline{PB}$. Por outro lado, se $\overline{PA} = \overline{PB}$, então os triângulos PAM e PBM são iguais, por possuírem lados respectivamente iguais; logo, os ângulos PMA e PMB são iguais e, portanto, retos. Provamos, então, que os pontos do espaço equidistante de A e B são todos aqueles pontos P tais que a reta PM é perpendicular a $\overline{AB}$. Mas estes são exatamente os pontos do plano que passa por M e é perpendicular a $\overline{AB}$; este é o chamado *plano mediador* de AB.

Exemplo. Vamos resolver agora o problema que mencionamos na introdução deste livro. Ou seja, vamos provar que as *arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais*. Na verdade, vamos preferir mostrar algo mais geral (pode parecer paradoxal que seja mais simples demonstrar um resultado mais geral, mas às vezes isto ocorre: fazendo o teorema tão geral quanto possível identificamos com mais facilidade as técnicas a usar). Dados pontos A, B, C e D do espaço tais que $\overline{AB} = \overline{AD}$ e $\overline{CB} = \overline{CD}$ (o que ocorre no tetraedro regular e ocorre também em um losango ABCD), afirmamos que as retas AC e BD são ortogonais. Realmente, a condição dada implica que A e C estão ambos no plano mediador de $\overline{BD}$. Mas toda reta contida em um plano que é perpendicular a BD é certamente ortogonal a BD.
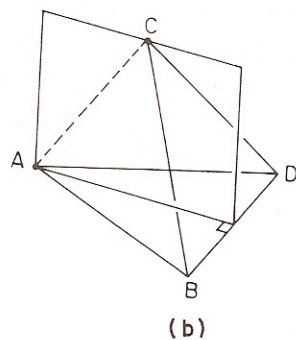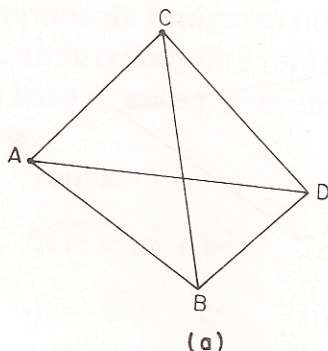
Fig. 9.3 - As arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais

Distância de ponto a plano. Dado um plano α e um ponto P do espaço, o ponto Q em que a reta perpendicular a α traçada por P corta o plano α é chamada de *projeção ortogonal* de P sobre α (Figura 9.4). O comprimento do segmento $\overline{PQ}$ é a *distância* de P a α. Note que se R é um outro ponto qualquer do plano, o triângulo PQR é retângulo e tem $\overline{PQ}$ como cateto e $\overline{PR}$ como hipotenusa. Assim, o comprimento da perpendicular $\overline{PQ}$ é menor que o comprimento de qualquer oblíqua $\overline{PR}$.
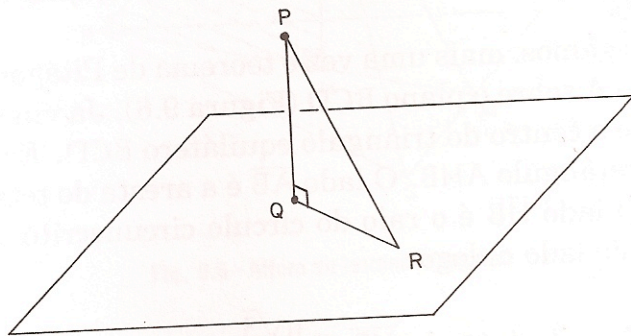
Fig. 9.4 - Distância de ponto a plano

Se uma reta r é paralela a um plano (Figura 9.5a), todos os seus pontos estão a igual distância do plano. De fato, se de dois pontos P_1 e P_2 da reta r paralela a α traçamos as perpendiculares $\overline{P_1Q_1}$ e $\overline{P_2Q_2}$ a α, obtemos um retângulo $P_1P_2Q_2Q_1$. Logo, $\overline{P_1Q_1} = \overline{P_2Q_2}$.
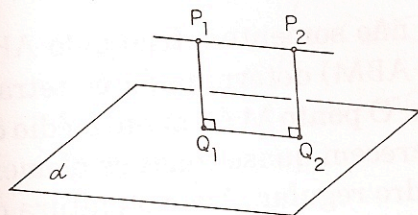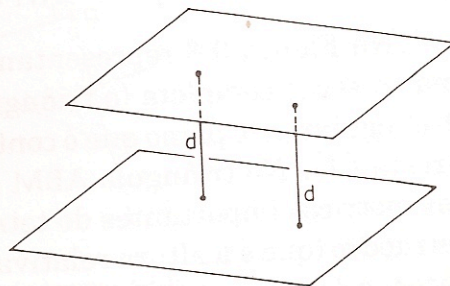
Fig. 9.5

Analogamente, se β é um plano paralelo a α, todos os seus pontos estão à mesma distância d de α (Figura 9.5b). O número d é a distância entre os planos α e β. Note que d é igual ao comprimento do segmento determinado pelos planos em qualquer reta perpendicular a ambos. Note também que qualquer segmento de extremos em α e β tem comprimento maior do que ou igual a d.

Exemplo. Em um tetraedro regular ABCD de aresta a, qual é a distância do vértice A ao plano BCD? (Isto é, qual é a altura do tetraedro?)

Empregamos, mais uma vez o teorema de Pitágoras. Seja H a projeção de A sobre o plano BCD (Figura 9.6). Já vimos antes que o ponto H é o centro do triângulo equilátero BCD. Examinemos o triângulo retângulo AHB. O lado $\overline{AB}$ é a aresta do tetraedro; logo, $\overline{AB} = a$. O lado $\overline{HB}$ é o raio do círculo circunscrito ao triângulo equilátero de lado a; logo

$$\overline{HB} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Temos, então:

$$\overline{AH^2} + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2$$

e, daí,

$$\overline{AH} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Na Figura 9.6 representamos não somente o triângulo AHB mas a seção completa (o triângulo ABM) determinada no tetraedro regular pelo plano que o contém. O ponto M é o ponto médio da aresta $\overline{CD}$. No triângulo ABM aparecem quase todos os elementos métricos importantes do tetraedro regular. Além da altura do tetraedro (que é a altura relativa a A do triângulo ABM), nele aparecem o ângulo entre duas faces, o ângulo entre uma aresta e uma face, a distância entre arestas opostas e os raios das esferas inscrita, circunscrita e tangente às arestas do tetraedro. Identifica-

remos alguns desses elementos mais tarde; os demais aparecerão nos exercícios.
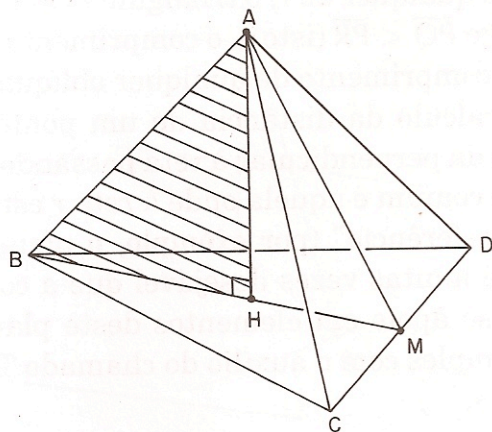
Fig. 9.6 - Altura do tetraedro regular

Distância de ponto a reta. Dado um ponto P e uma reta r do espaço, o ponto Q em que a reta r corta o plano perpendicular a r passando por P é chamado de *projeção ortogonal* de P sobre r (Figura 9.7).
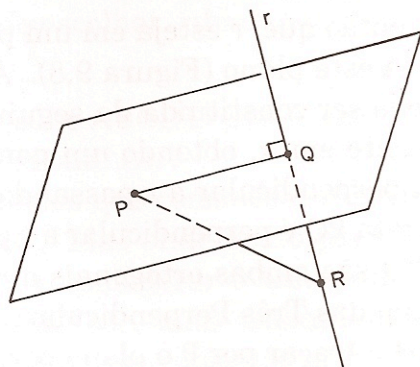
Fig. 9.7 - Distância de ponto a reta

O comprimento do segmento $\overline{PQ}$ é a *distância* de P a r. Se P não pertence à reta r os pontos P e Q são distintos e PQ é a *única* reta

perpendicular a r traçada por P (P e r definem um único plano e, neste plano, PQ é a única perpendicular a r passando por P). Se R é um outro ponto qualquer de r, o triângulo PQR tem hipotenusa $\overline{PR}$ e cateto $\overline{PQ}$; logo $\overline{PQ} < \overline{PR}$ (isto é, o comprimento da perpendicular é menor que o comprimento de qualquer oblíqua).

Assim, o cálculo da distância de um ponto a uma reta envolve o traçado da perpendicular à reta passando pelo ponto. Uma situação muito comum é aquela onde a reta r esteja situada sobre um "plano de referência" (por exemplo, o plano do chão). Nestas situações, é muitas vezes desejável que a construção da reta perpendicular se apoie em elementos deste plano de referência. Isto se torna simples com o auxílio do chamado Teorema das Três Perpendiculares.

Se três pontos não coplanares A, B *e* C *são tais que as retas* AB *e* BC *são ambas ortogonais a uma certa reta* r*, então a reta* BC *também é ortogonal a* r.

O leitor já foi convidado a demonstrar esta propriedade no exercício 7.3. Para a prova, basta observar que se r é ortogonal às retas concorrentes AB e BC do plano ABC, então r é perpendicular ao plano; logo, r é ortogonal a AC.

Suponhamos, então que, r esteja em um plano α e que P seja um ponto exterior a este plano (Figura 9.8). A perpendicular a r passando por P pode ser constituída da seguinte forma: projetamos P ortogonalmente em α, obtendo um ponto P'. No plano α, conduzimos a reta perpendicular a r passando por P', que corta r em um ponto Q; a reta PQ é perpendicular a r passando por Q. De fato, como PP' e $P'Q$ são ambas ortogonais a r, PQ é perpendicular a r, pelo Teorema das Três Perpendiculares. (É claro que esta construção equivale a traçar por P o plano perpendicular a r.)

Nos livro-textos é comum chamar-se de Teorema das Três Perpendiculares a propriedade que descreve a situação acima:

Se por um ponto P *traçamos a perpendicular* $\overline{PP'}$ *ao plano* α *e por um ponto qualquer* Q *de* α *traçamos a reta* r *perpendicular a* $P'Q$,

a reta PQ *é perpendicular a* r.
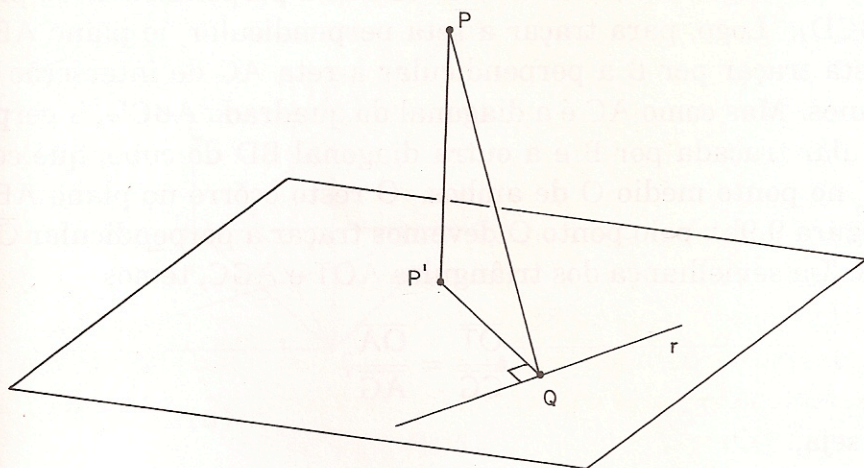
Fig. 9.8

Observe que a distância de P a r (isto é, o comprimento do segmento $\overline{PQ}$) pode ser calculada com o auxílio do Teorema de Pitágoras, uma vez conhecidos os comprimentos do segmento $\overline{PP'}$ (distância de P a α) e $\overline{P'Q}$ (distância de P' à reta r). Em muitos problemas práticos, estas duas últimas distâncias são fáceis de calcular, bastando escolher sabiamente o "plano de referência" contendo r.

Exemplo. Em um cubo ABCDEFGH de aresta a, qual é a distância do vértice B à diagonal AG?

Sabemos que temos que considerar a perpendicular $\overline{BT}$, traçada de B à reta AG. Mas onde fica o ponto T? Uma forma de resolver o problema é considerar o triângulo ABG, onde $\overline{AT}$ é a altura. Uma outra solução, mais trabalhosa, mas que nos dá a oportunidade de explorar os conceitos acima, consiste em considerar um plano conveniente contendo AG e traçar esta perpendicular em duas etapas, como explicado acima. É natural que este "plano de referência" seja o plano diagonal AEGC (Figura 9.9a). O primeiro passo é traçar a perpendicular de B a este plano. Mas

o plano da face ABCD é perpendicular ao plano AEGC (note que o plano diagonal contêm a reta AE que é perpendicular ao plano ABCD). Logo, para traçar a reta perpendicular ao plano AEGC basta traçar por B a perpendicular à reta AC de interseção dos planos. Mas como AC é a diagonal do quadrado ABCD, a perpendicular traçada por B é a outra diagonal BD do cubo, que corta AC no ponto médio O de ambos. O resto ocorre no plano AEGC (Figura 9.9b); pelo ponto O devemos traçar a perpendicular $\overline{OT}$ a AG. Da semelhança dos triângulos AOT e AGC, temos

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AG}},$$

ou seja,

$$\frac{\overline{OT}}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}},$$

e daí

$$\overline{OT} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Finalmente, no triângulo retângulo BOT, temos

$$\overline{BT^2} = \overline{BO^2} + \overline{OT^2} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} = \frac{2a^2}{3}.$$

Portanto,

$$\overline{BT} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Há outras formas de obter a resposta ao problema. Uma solução elegante consiste em ver que o ponto A está a uma distância igual a a de cada um dos pontos B, E e D. Da mesma forma, o ponto G está a uma distância $a\sqrt{2}$ destes mesmos pontos. Em conseqüência a reta AG é a perpendicular ao plano do triângulo equilátero BDE que passa pelo seu centro. Logo a distância de B

a AG é simplesmente o raio do círculo circunscrito a um triângulo equilátero de lado $a\sqrt{2}$.
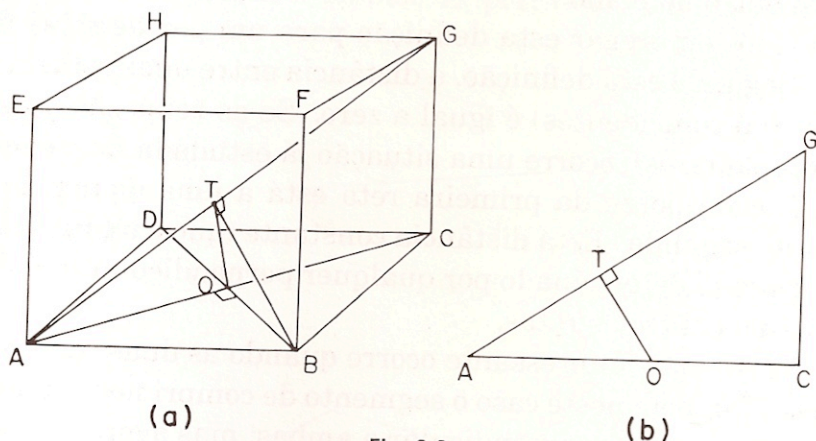
Fig. 9.9

Exemplo. A construção em duas etapas da perpendicular a uma reta aparece também ao se obter as coordenadas de um ponto P em um sistema ortogonal de coordenadas no espaço. Os pontos P_1, P_2, P_3 – cujas posições sobre os eixos fornecem as coordenadas de P – são obtidos traçando por P os planos perpendiculares a cada um dos eixos OX, OY e OZ (Figura 7.6). Alternativamente, podemos encarar tais pontos como sendo obtidos através da seguinte seqüência de construções: primeiro, projetamos P sobre os planos OXY, OXZ e OYZ. Por estas projeções, traçamos perpendiculares aos eixos contidas naqueles planos, assim determinando os pontos P_1, P_2 e P_3. Pelo teorema das três perpendiculares, esta construção é equivalente a traçar por P os planos perpendiculares a cada eixo, assim determinando as projeções ortogonais de P sobre cada eixo.

Distância entre retas reversas. Vimos acima diversos casos em que definimos a distância entre duas figuras – isto é, dois conjuntos de pontos – do espaço. Todos estes casos são situações particulares abrangidas pela seguinte definição: dadas duas figuras F_1 e F_2 definimos a distância entre F_1 e F_2 como o comprimento do menor segmento que tem extremos em F_1 e F_2. Por exemplo, a distância de um ponto a um plano foi definida de modo a ser, de

fato, o comprimento do menor segmento com um extremo no ponto dado e outro no plano.

Vamos empregar esta definição para um par de retas do espaço. Segundo esta definição, a distância entre duas retas concorrentes (ou coincidentes) é igual a zero. Se as retas são paralelas (logo coplanares), ocorre uma situação já estudada na Geometria Plana: cada ponto da primeira reta está a uma distância constante da segunda. Esta distância constante (que é o comprimento do segmento determinado por qualquer perpendicular a ambas) é a distância entre as retas.

O caso mais interessante ocorre quando as duas retas são reversas. Também neste caso o segmento de comprimento mínimo é dado por uma reta perpendicular a ambas; mas agora existe uma só perpendicular comum às duas retas. Veremos, a seguir, como construir esta perpendicular comum.

Primeiro mostraremos o seguinte: *dadas duas retas reversas* r *e* s*, existe um par de planos paralelos* α *e* β*, contendo* r *e* s *respectivamente* (estes planos paralelos costumam ajudar-nos a visualizar um par de retas reversas). Construímos tais planos traçando, por um ponto qualquer de r, a reta s' paralela a s e traçando por um ponto qualquer de s a reta r' paralela a r (Figura 9.10). As retas r e s' determinam o plano α e as retas s e r' determinam o plano β. Os planos α e β são distintos (caso contrário r e s estariam no mesmo plano). Por outro lado, as retas s e r' de β são paralelas às retas s' e r de α; logo elas são paralelas a α, o que mostra que os planos α e β são paralelos.

Para construir uma perpendicular comum a duas reversas r e s (Figura 9.11), começamos por traçar o par de planos paralelos α e β contendo cada uma das retas. A seguir, por um ponto A_1 qualquer de r traçamos uma reta t, perpendicular ao plano β, que o corta em B_1. Por B_1, traçamos a paralela r' a r. A reta r' está contida em β e corta s no ponto B_2. Finalmente, por B_2 traçamos a reta t' paralela a A_1B_1. Note que as retas t', t, r e r' estão todas em um mesmo plano. Logo, t' corta r em um ponto A_2. A reta t'

forma ângulo reto com r e s (por ser perpendicular aos planos α e β) e é concorrente com ambas. É, portanto, uma perpendicular comum a r e s.
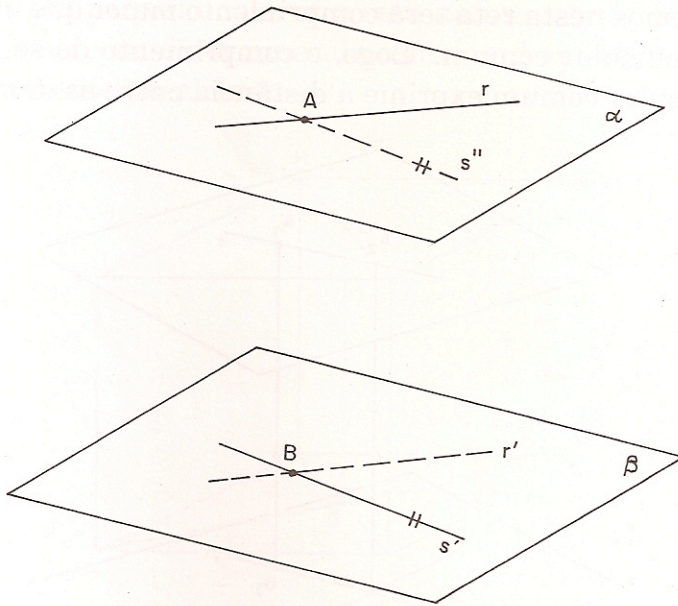
Fig. 9.10 - Planos paralelos contendo duas retas reversas

Para mostrar a unicidade, basta observar que se existisse outra perpendicular comum $\overline{CD}$, ela seria necessariamente paralela a A_2B_2, por serem ambas perpendiculares aos planos α e β. Mas assim os pontos C, D, A_2 e B_2 estariam todos no mesmo plano. Desta forma, as retas r e s seriam coplanares, o que é uma contradição.

A construção acima poderia, também, ser descrita do seguinte modo: pela reta r, traçamos o único plano que a contém e é perpendicular aos planos paralelos α e β. O ponto onde a reta s corta este plano pertence à perpendicular comum. Deste ponto, basta conduzir a reta perpendicular aos planos α e β; ela certamente cortará a reta s.

Como a perpendicular comum a r e s é também a perpendicular comum aos planos α e β, o comprimento do segmento por ela

determinado é o menor comprimento possível de um segmento cujos extremos sejam quaisquer pontos de α e β. Em particular, como r e s estão respectivamente contidas em α e β, qualquer segmento com extremos nesta reta terá comprimento maior que o segmento da perpendicular comum. Logo, o comprimento do segmento da perpendicular comum exprime a distância entre as duas retas.
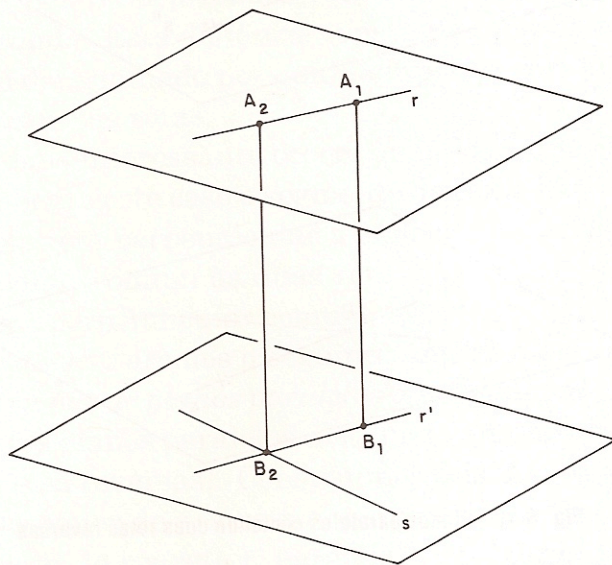
Fig. 9.11 - Perpendicular comum a duas retas reversas

Exemplo. Consideremos as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{FH}$ de duas faces opostas de um cubo ABCDEFGH (Figura 9.12). A perpendicular comum às retas AC e FH é a reta OO′, onde O e O′ são os centros das faces ABCD e EFGH.

Ângulo entre planos. Ao definir planos perpendiculares já introduzimos a forma pela qual o ângulo entre dois planos α e β será medido. Quando α e β são paralelos ou coincidentes, o ângulo entre eles é igual a zero, por definição. Se α e β são secantes, traçamos um plano γ perpendicular à reta de interseção de α e β, que corta α e β segundo as retas r e s, respectivamente (Figura 9.13). A

medida do ângulo entre os planos é, por definição, igual à medida do ângulo entre as retas r e s (é, assim, um valor entre 0° e 90°). Note que este ângulo é o mesmo qualquer que seja o plano γ: todos os planos perpendiculares à reta de interseção de α e β são paralelos entre si, determinando com α e β retas de interseção respectivamente paralelas.
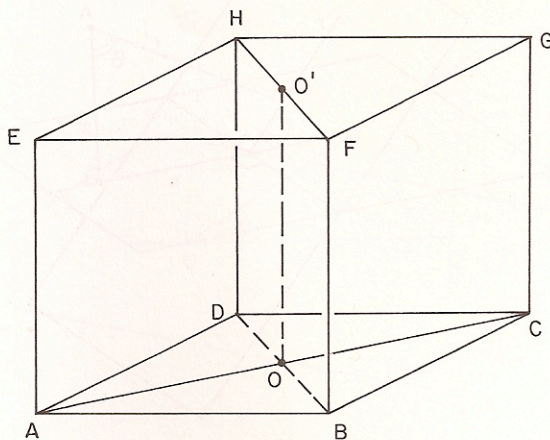
Fig. 9.12

Tomemos agora um ponto A qualquer sobre o plano γ e dele traçamos as retas r' e s' perpendiculares a α e β. Estas retas estão contidas em γ e são perpendiculares a r e s, respectivamente. Portanto, o ângulo formado por r' e s' é igual ao ângulo formado por r e s, que por sua vez é igual ao ângulo formado pelos planos. Ou seja, demonstramos que o *ângulo formado por dois planos é igual ao ângulo formado por duas retas respectivamente perpendiculares a estes planos*.

Convém aproveitar a ocasião para falar em medida de um diedro. Um *diedro* (ou ângulo diedro) é a figura formada por dois semiplanos – chamados de *faces* do diedro – limitados pela mesma reta, chamada de *aresta* do diedro (Figura 9.14). Para medir um diedro, conduzimos um plano perpendicular à aresta e medimos o ângulo entre as *semi-retas* determinadas em cada face. Observe

que a medida de um ângulo diedro pode variar entre 0° e 180°. Note também que o ângulo entre dois planos secantes é igual à medida do menor diedro formado por eles.
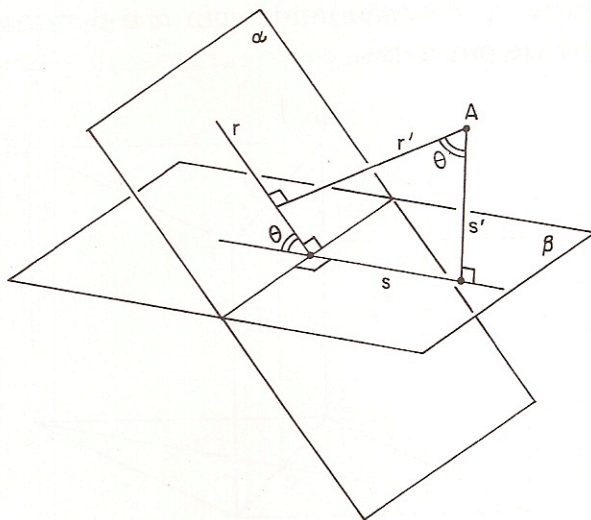
Fig. 9.13 - Ângulo entre planos
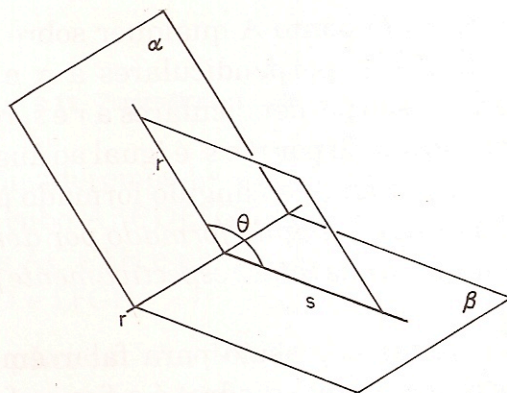
Fig. 9.14 - Medida de um diedro

Ângulo entre reta e plano. Vejamos agora como definir o ângulo entre uma reta e um plano. Naturalmente, este ângulo deverá ser

igual a $90°$ quando a reta é perpendicular ao plano e deverá ser igual a zero quando a reta está contida no plano ou é paralela a ele. Se uma reta r é oblíqua a um plano α, definimos o ângulo entre r e α como o ângulo que r forma com sua projeção ortogonal sobre α (Figura 9.15). Note que o ângulo que r forma com α é igual ao complemento do ângulo que r forma com uma reta perpendicular a α.
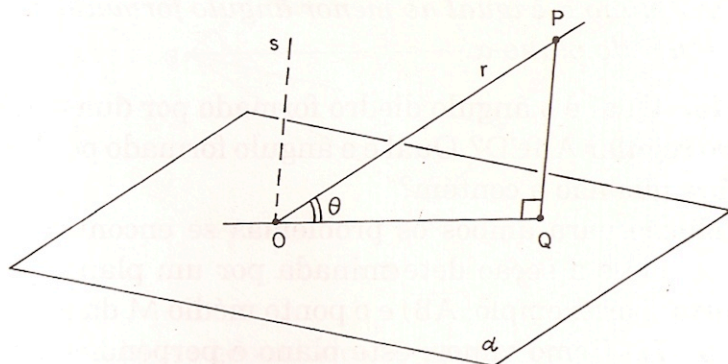
Fig. 9.15 - Ângulo entre reta e plano

Consideremos agora uma reta qualquer s contida no plano α e vamos comparar o ângulo θ' formado por r e s com o ângulo θ formado por r e α (Figura 9.16).
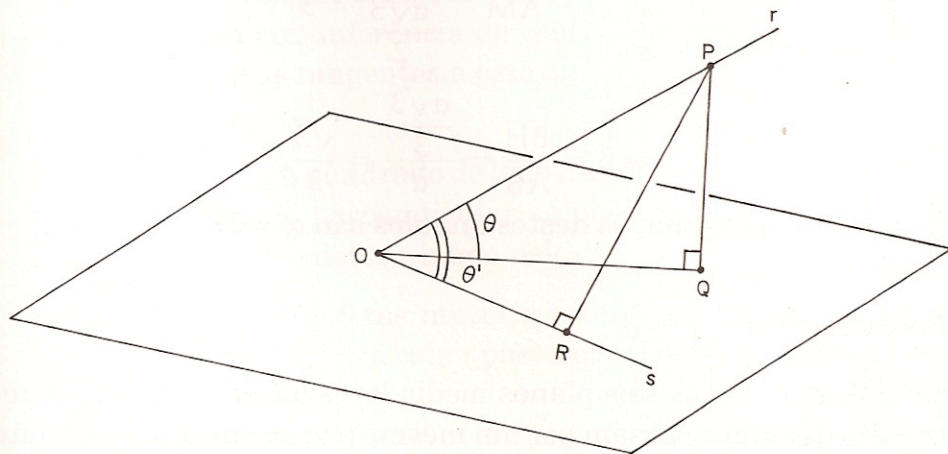
Fig. 9.16

Podemos supor que s passa pelo ponto O em que r corta α. Por um ponto P de s exterior a α tracemos a perpendicular $\overline{PQ}$ ao plano α e a perpendicular $\overline{PR}$ à reta s. Os triângulos retângulos OQP e ORP têm a hipotenusa comum $\overline{OP}$, enquanto os catetos opostos aos ângulos θ e θ' são tais que $\overline{PR} \geqslant \overline{PQ}$. Em conseqüência, $\operatorname{sen}\theta' \geqslant \operatorname{sen}\theta$ e, assim, $\theta' \geqslant \theta$. Além disso, a igualdade só ocorre quando a reta s é a projeção ortogonal de r sobre α. Portanto, o *ângulo entre uma reta* r *e um plano* α *é igual ao menor ângulo formado por* r *e uma reta qualquer do plano* α.

Exemplo. Qual é o ângulo diedro formado por duas faces de um tetraedro regular $ABCD$? Qual é o ângulo formado por uma aresta e uma face que não a contém?

A solução para ambos os problemas se encontra no mesmo triângulo, que é a seção determinada por um plano que contém uma aresta (por exemplo, $\overline{AB}$) e o ponto médio M da aresta oposta (Figura 9.17). Como vimos, este plano é perpendicular à aresta $\overline{BC}$. Logo, o ângulo $\alpha = A\widehat{M}B$ é o ângulo entre as faces ACD e BCD e o ângulo $\beta = A\widehat{B}M$ é o ângulo entre BA e o plano da face. Então, sendo H o centro da face ABC, temos:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{HM}}{\overline{AM}} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{6}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3};$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Os valores aproximados destes ângulos são $\alpha = 71^\circ$ e $\beta = 55^\circ$.

Exercícios

9.1 Mostre que os seis planos mediadores das arestas de um tetraedro qualquer passam por um mesmo ponto, que é equidistante dos quatro vértices.

9.2 Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de três pontos não colineares?
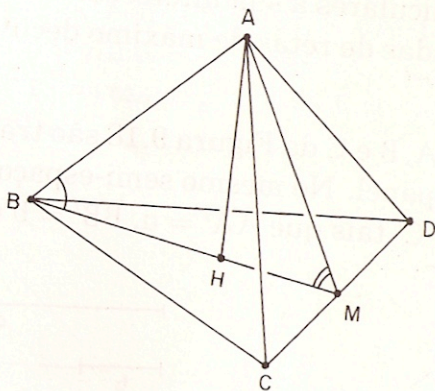
Fig. 9.17

9.3 Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois planos secantes dados? E se os planos forem paralelos?

9.4 Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de duas retas dadas? Examine todas as possíveis posições relativas das retas.

9.5 Seja O a projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α. Considere uma circunferência de centro O contida em α. Mostre que todas as retas tangentes a esta circunferência estão à mesma distância de P.

9.6 Seja $ABCD$ um quadrado de lado a e $\overline{PA}$ um segmento, também de comprimento a, perpendicular ao plano do quadrado. Calcule a medida do diedro determinado pelos triângulos PCB e PCD.

9.7 Considere três retas mutuamente perpendiculares x, y e z, concorrentes em O. Uma reta r passa por O e forma ângulos iguais a α, β e γ com x, y e z.

a) Mostre que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

b) Calcule γ, se $\alpha = \beta = 60°$

9.8 Sejam α e β dois planos secantes. Considere uma reta r qualquer contida em α. Mostre que o ângulo entre r e β é máximo quando r é perpendicular à interseção de α e β (retas de um plano α que são perpendiculares à sua interseção com o plano β são, por esta razão, chamadas de retas de máximo declive de α em relação a β).

9.9 Pelos pontos A, B e C da Figura 9.18 são traçadas perpendiculares ao plano do papel. No mesmo semi-espaço são determinados os pontos A', B' e C' tais que $\overline{AA'} = a$, $\overline{BB'} = b$ e $\overline{CC'} = c$.
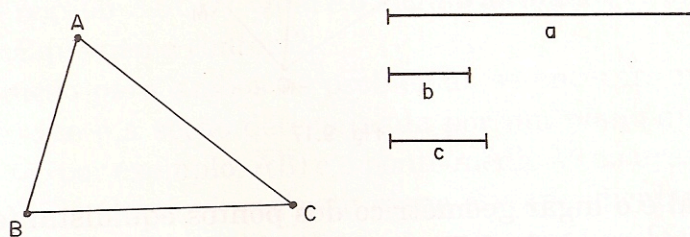
Fig. 9.18

Determine:

a) O ponto em que a reta $A'B'$ encontra o plano do papel.

b) A reta de interseção do plano definido por A', B' e C' com o plano do papel.

c) O pé da perpendicular baixada de A' à reta BC.

d) O ângulo formado pela reta $A'B'$ com o plano do papel.

e) O ângulo que o plano definido por A', B' e C' forma com o plano do papel.

9.10 Na figura 9.19, é dada a base ABC de uma pirâmide triangular V-ABC, além dos comprimentos das arestas laterais $\overline{VA}$, $\overline{VB}$ e $\overline{VC}$.

a) Determine a projeção ortogonal de V sobre o plano ABC.

b) Determine, graficamente, a altura da pirâmide.

c) Ache o ângulo que a aresta lateral $\overline{VA}$ forma com o plano da base.

d) Ache o ângulo que a face lateral VAB forma com o plano da base.

e) Ache o ângulo formado pelas faces laterais VAB e VAC.

9.11 Considere um octaedro regular de aresta a. Determine:

a) A distância entre duas faces opostas.

b) O ângulo diedro formado por duas faces adjacentes.
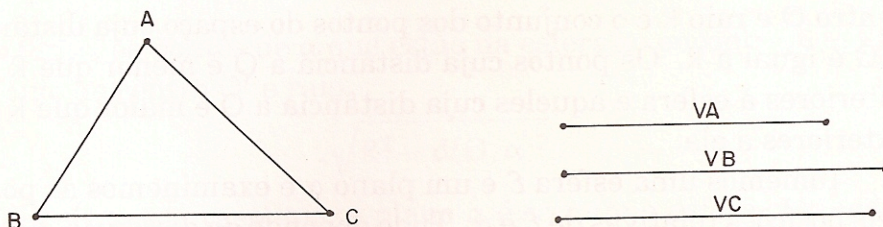
Fig. 9.19

9.12 Sejam r e s duas retas ortogonais e r' e s' as suas projeções ortogonais sobre um plano α. Sob que condições r' e s' formam ângulo reto?

9.13 Sejam r e s duas retas reversas ortogonais e $\overline{MN}$ o segmento da perpendicular comum. Tomam-se um ponto A sobre r e um ponto B sobre s. Calcular o comprimento do segmento AB em função de $\overline{MA} = a$, $\overline{NB} = b$ e $\overline{MN} = c$.

9.14 Mostre que a reta que une os pontos médios de duas arestas opostas de um tetraedro regular é a perpendicular comum a elas.

9.15 Mostre que a seção determinada em um cubo por um plano que passa pelo seu centro e é perpendicular a uma diagonal é um hexágono regular.

9.16 Qual é a seção determinada em um tetraedro regular $ABCD$ por um plano paralelo às arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e passando pelo ponto médio da aresta $\overline{CD}$?

10. Esfera

Nesta seção, usamos distâncias para estudar algumas propriedades da esfera, o análogo tridimensional do círculo. A esfera de centro O e raio R é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância a O é igual a R. Os pontos cuja distância a O é menor que R são interiores à esfera e aqueles cuja distância a O é maior que R são exteriores a ela.

Tomemos uma esfera $\mathcal{E}$ e um plano α e examinemos as possíveis posições relativas de $\mathcal{E}$ e α. Tudo depende da distância $d(O, \alpha)$ do centro O da esfera ao plano α.

Se $d(O, \alpha)$ é maior que o raio R, o plano é exterior à esfera. De fato, qualquer ponto de α estará a uma distância maior que R do ponto O; logo, nenhum ponto de α pertence a $\mathcal{E}$.

Se $d(O, \alpha)$ é exatamente igual a R, o único ponto de α que está a uma distância R de O é o ponto Q, pé da perpendicular a α traçada por O (figura 10.1). Dizemos, neste caso, que o plano α é tangente à esfera no ponto Q. Por um ponto qualquer da esfera passa um único plano tangente a ela, perpendicular ao raio no ponto de contato.
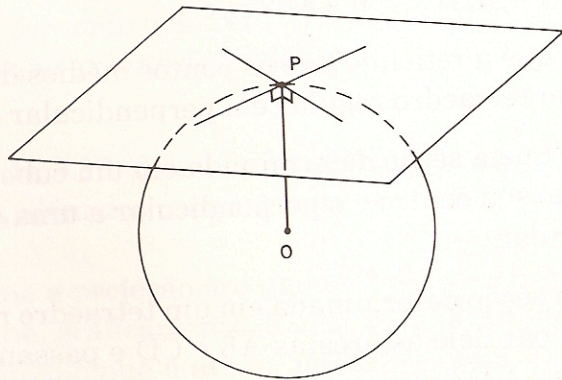
Fig. 10.1 - Plano tangente à esfera

Finalmente, consideremos o caso em que $d(O, \alpha) < R$ (Figura 10.2). Seja O' o pé da perpendicular traçada de O ao plano α. Qualquer que seja o ponto P em α, o triângulo $PO'O$ é retângulo em O'. Logo,

$$\overline{PO^2} = \overline{PO'^2} + \overline{OO'^2}$$

e, assim, $\overline{PO} = R$ se e só se

$$\overline{PO'^2} = R^2 - d(O, \alpha)^2.$$

Portanto, os pontos de α que estão na esfera se encontram em um círculo de centro O' e raio

$$\sqrt{R^2 - d(O, \alpha)^2}.$$

Dizemos, neste caso, que o plano α é *secante* à esfera. Quando o plano α passa pelo centro da esfera (isto é, $d(O, \alpha) = 0$), o círculo por ele determinado tem raio máximo, igual ao raio da esfera, e é dito um *círculo máximo* da esfera.
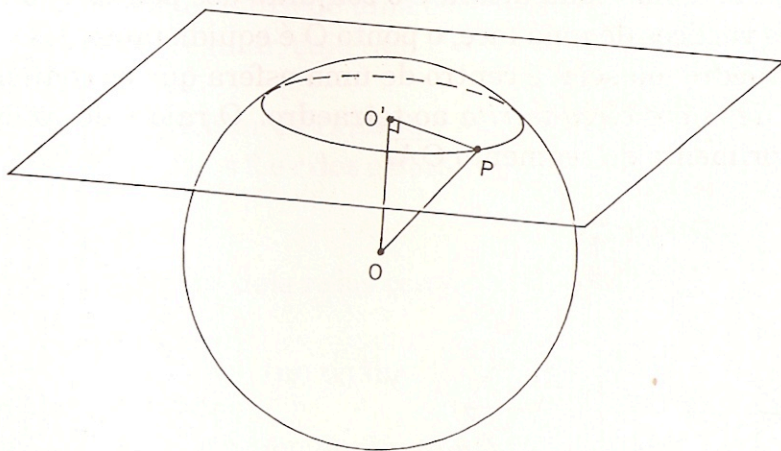
Fig. 10.2 - Plano secante à esfera

O estudo das posições relativas de uma reta r e uma esfera $\mathcal{E}$ é análogo. Se a distância $d(O, r)$ entre o centro da esfera e a reta é maior que R, não há pontos comuns entre a reta e a esfera. Se $d(O, r)$ é igual ao raio R, então o único ponto da reta que pertence à esfera é o pé da perpendicular baixada de O à reta r; dizemos,

então, que r é tangente à esfera. Por um ponto qualquer Q da esfera passam uma infinidade de retas tangentes, todas elas contidas no plano tangente à esfera em Q (veja novamente a figura 10.1). Finalmente, se $d(O, r)$ é menor que R, existem exatamente dois pontos de r em comum com a circunferência, simétricos em relação ao pé da perpendicular traçada por O. Neste caso, a reta é secante à esfera.

Exemplo. Vejamos algumas esferas associadas ao tetraedro regular. Tomemos, mais uma vez, o plano que contém uma aresta $\overline{AB}$ e o ponto médio M da aresta oposta $\overline{CD}$ (figura 10.3). Já vimos anteriormente que este plano contém as perpendiculares $\overline{AH}$ e $\overline{BH'}$ às faces BCD e ACD traçadas por A e B, respectivamente, que chamamos de alturas do tetraedro. O ponto de interseção destas alturas é um ponto O, que chamamos de centro do tetraedro, pelo qual também passam, como já vimos, as outras duas alturas do tetraedro. Como cada altura é o conjunto dos pontos equidistantes dos vértices de uma face, o ponto O é equidistante dos vértices do tetraedro; ou seja, é centro de uma esfera que os contém, chamada de *esfera circunscrita* ao tetraedro. O raio R desta esfera é o comprimento do segmento $\overline{OA}$.
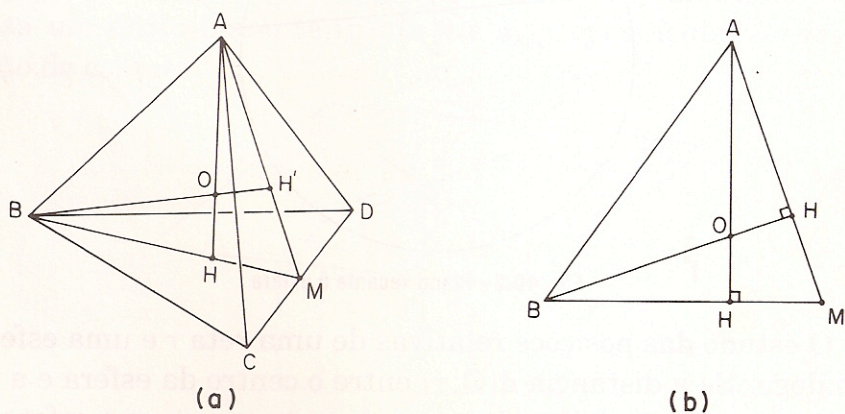
Fig. 10.3 - Esferas no tetraedro regular

Por outro lado, o comprimento do segmento $\overline{OH}$ é a distância

do ponto O à face BCD. Mas, da igualdade dos triângulos $OH'A$ e OHB concluímos que $\overline{OH} = \overline{OH'}$. Isto mostra que o ponto O é equidistante das faces ABC e BCD; na verdade, podemos repetir o mesmo argumento com cada par de faces e concluímos que O é equidistante de todas as faces do tetraedro. Logo, O é o centro de uma esfera tangente às faces do tetraedro, chamada de esfera inscrita no tetraedro. O raio r desta esfera é o comprimento do segmento $\overline{OH}$.

Finalmente, consideremos a distância do ponto O às arestas do tetraedro. O segmento $\overline{OM}$ é perpendicular a $\overline{CD}$, por estar em um plano perpendicular a $\overline{CD}$. Logo $\overline{OM}$ é a distância de O à aresta $\overline{CD}$. Mas este argumento pode ser repetido (para cada plano contendo duas alturas do tetraedro) para mostrar que o segmento que liga O ao ponto médio de cada aresta é perpendicular a cada aresta. Um argumento baseado em igualdade de triângulos mostra, além disso, que todos estes segmentos são iguais. Logo, o ponto O também é centro de uma esfera tangente a todas as arestas do tetraedro regular, cujo raio r' é o comprimento do segmento OM.

É simples calcular os raios R, r e r' das três esferas descritas acima. Entre os raios R e r das esferas circunscrita e inscrita valem as relações:

$$R + r = \frac{a\sqrt{6}}{3} \qquad \text{(os dois raios compõem a altura do tetraedro)}$$

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \qquad \text{(no triângulo retângulo BOH)}$$

Resolvendo o sistema encontramos

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4} \quad \text{e} \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

Portanto $R = 3r$, o que determina a posição do ponto O sobre cada altura do tetraedro.

Para achar o raio r' da esfera tangente às arestas, usamos agora o triângulo OHM, no qual o cateto $\overline{OH}$ é o raio r da esfera

inscrita. Temos:

$$r'^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{12}\right)^2$$

e, daí,

$$r' = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Exercícios

10.1 Sejam dois pontos não diametralmente opostos de uma esfera. Mostre que existe um e somente um círculo máximo da esfera passando por A e B.

10.2 Mostre que dois círculos máximos de uma esfera se encontram em dois pontos diametralmente opostos.

10.3 Mostre que a interseção de duas esferas é vazia, um ponto ou uma circunferência.

10.4 Sejam P e Q pontos do espaço. Qual é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares baixadas de P às retas passando por Q? Qual é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares baixadas de P aos planos passando por Q?

10.5 Seja P um ponto exterior a um plano α e Q um ponto de α. Qual é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de P às retas de α que passam por Q?

10.6 Seja $ABCDEFGH$ um cubo. Mostre que A, C, F e H são vértices de um tetraedro regular. Utilize este fato para mostrar que o raio da esfera tangente às arestas de um tetraedro regular de aresta a é $r' = a\sqrt{2}/4$.

10.7 Em um cubo de aresta a, calcule os raios das esferas circunscrita, inscrita e tangente às arestas.

10.8 Em um octaedro regular de aresta a, calcule os raios das esferas circunscrita, inscrita e tangente às arestas.

10.9 Quatro esferas de raio 1 são tangentes entre si exteriormente três a três e tangenciam internamente uma esfera de raio R. Determine R.

10.10 Considere nove esferas de raio R, interiores a um cubo de aresta a, sendo uma com centro no centro do cubo e cada uma das demais tangentes a três faces. Calcule R em função de a.

10.11 Mostre que todo tetraedro admite uma esfera circunscrita, uma esfera inscrita e uma esfera tangente às arestas.

11. Noções de Geometria Descritiva

Uma das maiores dificuldades na Geometria Espacial é a necessidade de representar figuras espaciais nas superfícies planas de que dispomos para desenhar ou escrever. De um modo geral, esta representação é feita através de *projeções*. Há duas formas principais de se projetar uma figura F em um plano α: através de uma projeção *central* (ou *cônica*) ou através de uma projeção *paralela* (ou *cilíndrica*). No caso de uma projeção central (figura 11.1a), a projeção de cada ponto P de F é a interseção com α da reta OP, onde O é um ponto fixo, chamado de *centro de projeção*. Em uma projeção paralela (figura 11.1b), a projeção de cada ponto P é a interseção com α da reta que passa por P e é paralela a uma direção fixa Δ, chamada de *direção de projeção*. Um caso particular importante de projeção paralela ocorre quando Δ é perpendicular a α. Neste caso, F é projetada *ortogonalmente* sobre α.
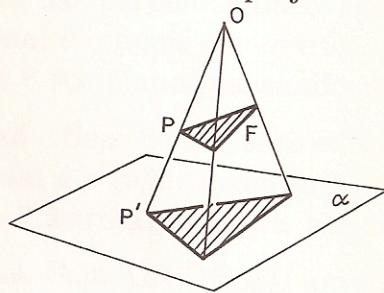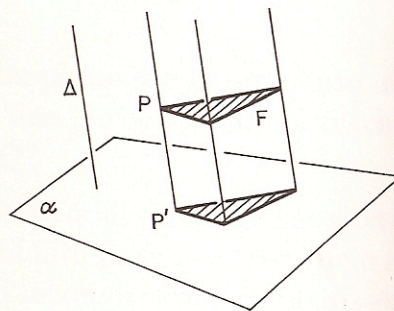
Fig. 11.1 - Projeção central e projeção paralela

É importante notar que há perda de informação ao se projetar uma figura sobre um plano. Em uma projeção paralela, por exemplo, pontos pertencentes a uma reta paralela à direção de

projeção são indistinguíveis em projeção. Para que exista uma correspondência bi-unívoca entre as figuras espaciais e sua representação em projeção é necessário recorrer a mais de uma projeção.

Gaspar Monge (1746-1818) idealizou um sistema de projeções no qual um ponto A é representado por suas projeções A_1 e A_2 em dois planos de referência π_1 e π_2, perpendiculares entre si. É cômodo imaginar que π_1 é um plano horizontal e π_2 é um plano vertical. Uma vez efetuada a projeção de A sobre π_1 e π_2 (figura 11.2a), giramos (ou rebatemos) π_1 em torno de sua reta x de interseção com π_2 (chamada de *linha de terra*), até que ele venha a coincidir com π_2. Desta forma, ambas as projeções do ponto A ficam em um mesmo plano. O desenho assim obtido é chamado de *épura*. Note que, na épura, as projeções de um ponto qualquer estão sempre sobre uma reta perpendicular à linha de terra (figura 11.2b). O conjunto de técnicas utilizadas para representar figuras espaciais segundo o método descrito acima constitui a chamada *Geometria Descritiva*. Veremos a seguir alguns problemas que ocorrem na representação de pontos, retas e planos. Tais problemas fornecem uma excelente oportunidade de colocar em jogo as propriedades estudadas anteriormente.
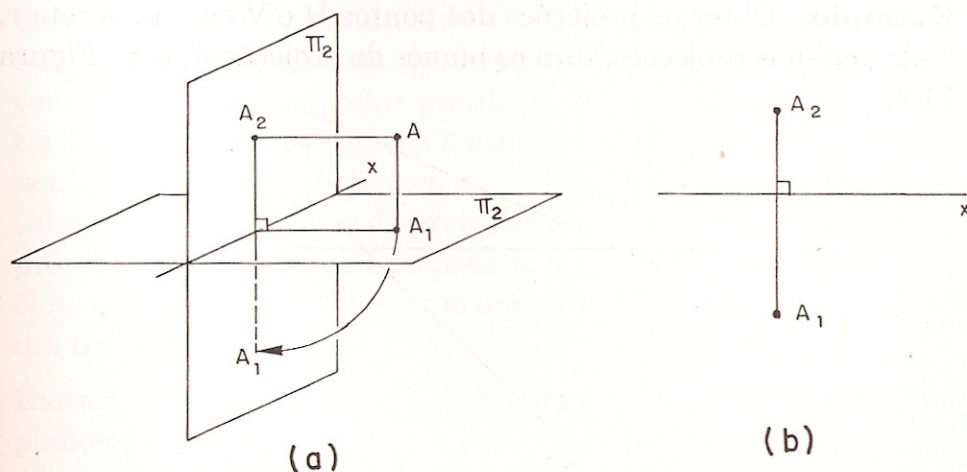
Fig. 11.2 - O método da Geometria Descritiva

Representação de retas. Uma reta r é representada na épura por suas projeções r_1 e r_2 (Figura 11.3). Em geral, estas projeções são retas, mas podem se reduzir a um único ponto quando r é perpendicular a um ou outro plano de projeção. Note que pontos A_1 e A_2 de r_1 e r_2 situados em uma mesma perpendicular à linha de terra correspondem às projeções de um ponto A pertencente à reta.
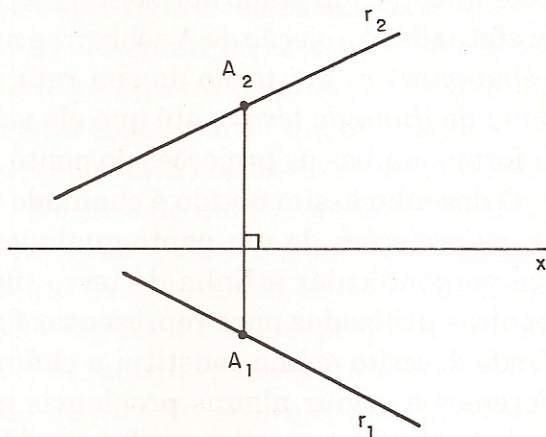
Fig. 11.3 - Projeções de uma reta

Exemplo. Obter as projeções dos pontos H e V em que a reta r, dada por suas projeções, fura os planos de projeção π_1 e π_2 (Figura 11.4).
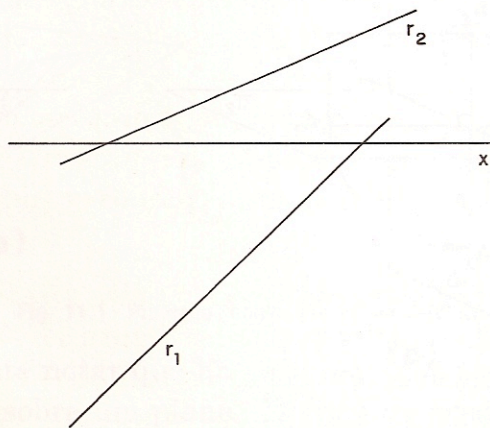
Fig. 11.4

A projeção H_2 de H no plano vertical está sobre a linha de terra (Figura 11.5); logo, H_2 é a interseção de r_2 com a linha de terra e H_1 é o ponto correspondente sobre r_1. A obtenção de V é análoga.
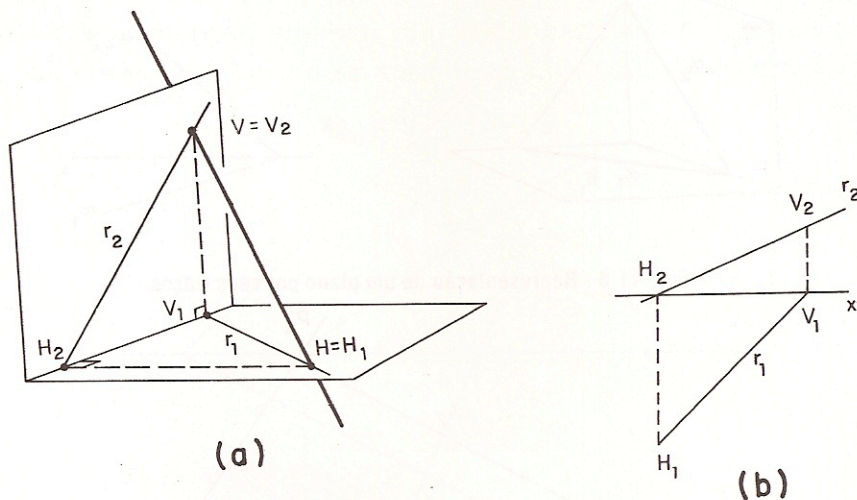
Fig. 11.5 - Pontos em que uma reta fura os planos de projeção

Representação de planos. Podemos recorrer a qualquer uma das formas de determinação de um plano: através de três pontos não colineares, uma reta e um ponto exterior a ela, duas retas concorrentes ou duas retas paralelas. O mais comum é representarmos um plano pelos seus *traços* $\alpha\pi_1$ e $\alpha\pi_2$ em π_1 e π_2 (isto é, pelas retas de interseção com α_1 e α_2). Como os traços estão contidos em um dos planos de projeção, a projeção no outro plano é a própria linha de terra e é omitida na representação (Figura 11.6). Note que planos paralelos a um dos planos de projeção só possuem um traço.

Exemplo. Determine as projeções da reta r de interseção de dois planos α e β, dados por seus traços (Figura 11.7).

A solução consiste em achar os pontos H e V em que r fura os planos de projeção π_1 e π_2 (se existirem). H é a interseção dos traços de α e β em π_1; logo, sua projeção H_1 coincide com

H, enquanto H_2 está na linha de terra. Da mesma forma, V é a interseção dos traços de α e β em π_2 (Figura 11.8).
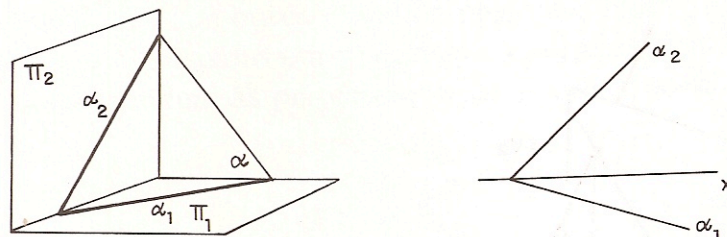
Fig. 11.6 - Representação de um plano por seus traços
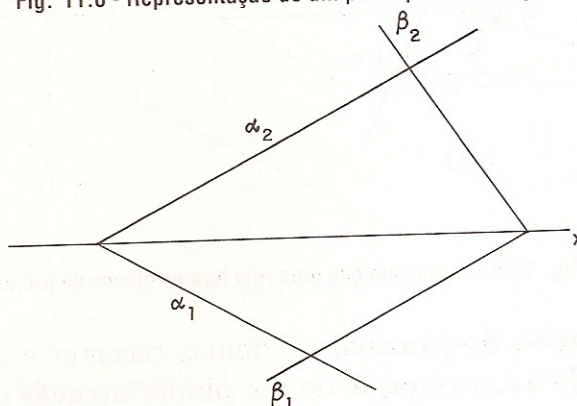
Fig. 11.7
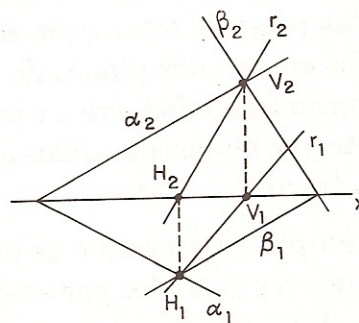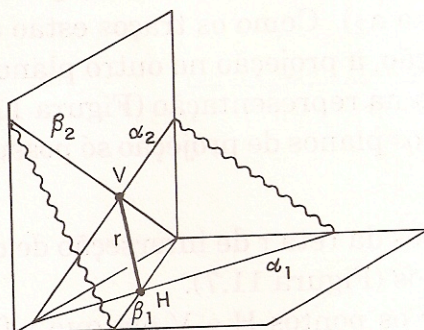
Fig. 11.8 - Interseção de dois planos

Exemplo. Determine o ponto A em que a reta r, dada por suas projeções, fura o plano α, dado por seus traços em π_1 e π_2 (Figura 11.9).
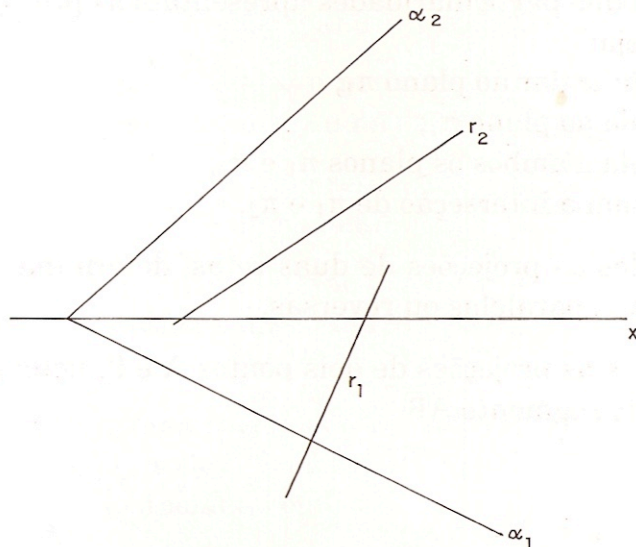
Fig. 11.9

A idéia é utilizar um plano conveniente β passando pela reta r. O ponto em que r fura α estará, necessariamente, na reta de interseção de α e β, cuja determinação foi vista no exemplo anterior. O mais simples é passar por r um plano β que seja perpendicular a um dos planos de projeção (digamos, π_1). O traço de β em π_1 é a projeção r_1 de r, enquanto o traço em π_2 é a reta perpendicular à linha de terra passando pelo seu ponto de interseção com r_1 (Figura 11.10). A reta s de interseção de α e β pode então ser determinada. Note que a projeção horizontal s_1 de s também coincide com r_1 (ambas se projetam segundo o plano β). Para achar o ponto A em que r fura α, basta achar o ponto de interseção de r e s, que é encontrado através da interseção de suas projeções r_2 e s_2.

Exercícios

11.1 Qual é o lugar geométrico dos pontos do espaço que possuem projeções coincidentes na épura?

11.2 Diga que particularidades apresentam as projeções de uma reta que seja:

a) perpendicular ao plano π_1;

b) paralela ao plano π_1;

c) paralela a ambos os planos π_1 e π_2;

d) ortogonal à interseção de π_1 e π_2.

11.3 Dadas as projeções de duas retas, determinar se elas são concorrentes, paralelas ou reversas.

11.4 Dadas as projeções de dois pontos A e B, determine o comprimento do segmento $\overline{AB}$.
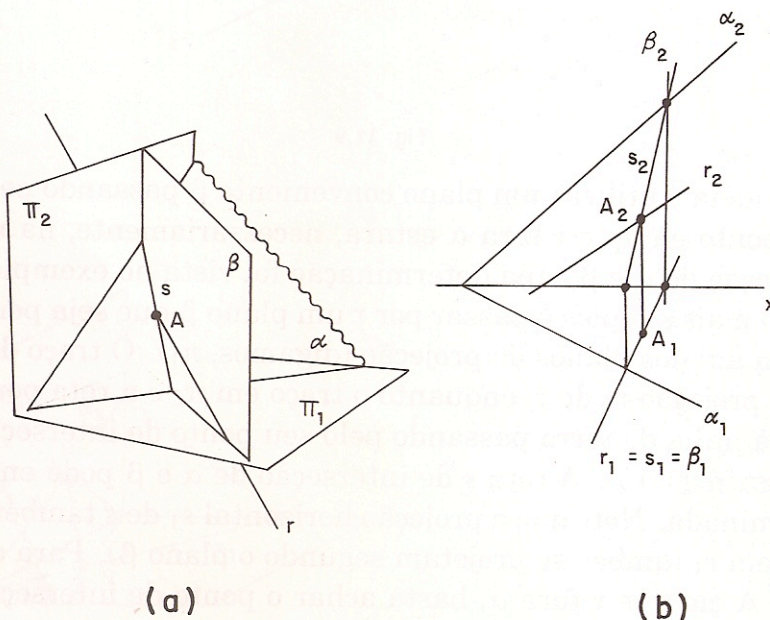
Fig. 11.10 - Interseção de reta e plano

11.5 Diga que particularidades apresentam os traços de um plano que seja:

a) paralelo ao plano π_1;
b) paralelo à interseção de π_1 e π_2;
c) perpendicular a π_1;
d) perpendicular a ambos os planos π_1 e π_2.

11.6 Dadas as projeções de um ponto e os traços de um plano, determinar se o ponto pertence ou não ao plano.

11.7 Dadas as projeções de uma reta r e de um ponto P exterior a r, determinar os traços do plano definido por r e P.

11.8 Dados os traços de um plano α e as projeções de um ponto P, determinar os traços de um plano que passa por P e é paralelo a α.

11.9 Sejam r e s retas reversas e P um ponto do espaço, dados através de suas projeções. Construa as projeções de uma reta passando por P e se apoiando em r e s.

11.10 Seja r uma reta secante a um plano α e P um ponto exterior a r e a α (r e P dados por suas projeções e α por seus traços).

a) Construa uma reta que passa por P, encontra r e é paralela a α.
b) Construa um segmento cujos extremos estão em r e α e cujo ponto médio seja P.

11.11 Dados os traços de um plano e as projeções de um ponto, determine a distância do ponto ao plano.

Este livro é um dos textos utilizados nos Cursos de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Segundo Grau, um programa organizado pelo IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, com o patrocínio de VITAE, Apoio à Cultura, Educação e Promoção Social.

O livro procura discutir as dificuldades encontradas na passagem da Geometria Plana para a Espacial. A necessidade de um desenvolvimento mais cuidadoso da teoria na Geometria Espacial é justificada pela maior dificuldade em se obter apoio da intuição ao se analisar figuras no espaço. O leitor é conduzido ao longo do processo de escolha de um conjunto adequado de axiomas e, a partir deles, às noções fundamentais de paralelismo e perpendicularismo entre retas e planos no espaço. A introdução de cada novo conceito é acompanhada por exemplos de construções no espaço que podem ser efetuadas com base neste conceito. O texto inclui um capítulo sobre Geometria Descritiva, com o intuito de permitir uma maior concretização das noções apresentadas ao longo do livro.